Analiza matematyczna 3. Lista 8. 30.11, 1.12.2022

Uwaga. Niektóre z podpunktów zadań mają 'haczyk' i można je szybko rozwiązać.

1. Czy podane równanie określa jednoznacznie funkcję uwikłaną $y = y(x)$ w pewnych otoczeniu podanego punktu? Jeśli tak, to znajdź równanie stycznej w tym punkcie.

a) $x^4y + xy^3 = 10,\ \ A=(1,2)$ **b)** $x^y = y^x,\ \ A=(2,4);\ B=(3,3);\ C=(2,5)$

c) $x^2+y^2 = 2xy,\ A=(1,1);\ B=(0,0)$ **d)** $x^4+y^4 = 2x^2y^2,\ A=(1,1);\ B=(0,0)$

e) $x^2+y^2= 2x,\ A=(1,1);\ B=(0,0)$ **f)** $x^2+y^2-x = 2xy,\ A=(1,0);\ B^*=(0,0)$

g) $x^3 - y^3 + x - y = 0,\ A=(p,p)$ **h)** $x^4 + y^4 = 2xy,\ A=(1,1);\ B^*=(0,0)$

Wsk. (do h) B^*) Punkty $p_t = \left(\sqrt{\frac{2t}{1+t^4}}, t\sqrt{\frac{2t}{1+t^4}}\right)$, dla $t > 0$ spełniają równanie (sprawdź!). Jak leżą względem prostej $y = x$? Oblicz $\lim\limits_{t\to+\infty} p_t$ i $\lim\limits_{t\to0^+} p_t$.

2. Wyznacz równania płaszczyzn stycznych do powierzchni w podanych punktach.

a) $x^2z + yz^2 - 2 = 0,\ A=(\sqrt{2},0,1)$ **b)** $e^{xz} = yz,\ A=(0,1,1);\ B=(1,e,1)$

c) $x^2+ y^3+ z^4 = x+z,\ \ A=(0,0,0);\ B=(1,0,0);\ C=(1,0,1)$

3. Oblicz pochodną dy/dx i drugą pochodną d^2y/dx^2 funkcji uwikłanych $y = y(x)$

a) $xe^y - y + 1 = 0$ **b)** $x^2 + y^2 = 3xy$ **c)** $x - y + e^x - e^y = 0$

4. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji uwikłanej $y = y(x)$ zadanej równaniem:

a) $x^2 + y^2 + 4y = xy + 2x$ **b)** $x^3 + y^3 = 12xy$ **c)** $\ln\sqrt{x^2+ y^2} = \arctan\frac{y}{x}$

5. Wiedząc, że linia $B = \{(x, y) : x^4 + y^4 = 9xy\}$ wygląda jak przekręcona nieco ósemka, znajdź najmniejsze takie a, że $B \subset [-a, a]^2$.