Analiza matematyczna 3. Lista 9.

7,8.12.2022

1. Które całki można obliczyć bez rachunku całkowego? **a)** $\iint\limits_{[0,1]^2} 2x+3y\,d\omega$

b) $\iint\limits_{[0,1]^2} e^{[x+y]}\,d\omega$ **c)** $\iint\limits_{[-1,1]^2} e^{[x+y]}\,d\omega$ **d)** $\iint\limits_{[0,1]^2} x^2y^3\,d\omega$ **e)** $\iint\limits_{[-1,1]^2} x^2y^3\,d\omega$

f) $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} x^2y^3\,d\omega$ **g)** $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \sqrt{x^2+y^2}\,d\omega$ **h)** $\iint\limits_{[-1,1]^2} |x+y|\,d\omega$

2. Niech ω_n oznacza podział $P=[0,1]\times[0,1]$ na n^2 przystających kwadratów.

(i) Oblicz (sprytnie) sumy dolne s_{ω_n}, sumy górne S_{ω_n} i porównaj z $\iint\limits_P f(x,y)\,d\omega$

a) $f(x,y)=[y^2]$ **b)** $f(x,y)=\{2y\}$ **c)** $f(x,y)=y^2$ **d)** $f(x,y)=x+y$

(ii) Oblicz (sprytnie) różnicę $S_{\omega_n}-s_{\omega_n}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} S_{\omega_n}-s_{\omega_n}$

e) $f(x,y)=[y\sqrt{2}]$ **f)** $f(x,y)=\pi x+ey$ **g)** $f(x,y)=e^y$ **h)** $f(x,y)=e^x+y^5$

* * *

3. Oblicz całki wielokrotne (podaj całki podwójne/potrójne, z których powstały).

Np.: $$\int_0^6\int_0^1 xy+ye^x\,dxdy=\int_0^6\left(\int_0^1 xy+ye^x dx\right)dy=\int_0^6\left[\tfrac12x^2y+ye^x\right]_0^1 dy=$$
$$=\int_0^6 y\left(e-\tfrac12\right)dy=\left[\tfrac12y^2\left(e-\tfrac12\right)\right]_0^6=18\left(e-\tfrac12\right)=18e-9$$
$$\int_0^6\int_0^1 xy+ye^x\,dxdy=\iint\limits_{[0,1]\times[0,6]} xy+ye^x\,d\omega$$

a) $\int_2^4\int_3^7 xy\,dxdy$ **b)** $\int_1^2\int_{x-1}^{x+1} xy\,dydx$ **c)** $\int_4^6\int_1^2\int_2^3 xyz\,dxdydz$ **d)** $\int_0^1\int_z^{2z}\int_0^y yz^2\,dxdydz$

4. Oblicz całkę $\iint\limits_A y\,d\omega$, gdzie A jest obszarem wyznaczonym przez linie:

a) $y=x^2$ i $y=x+6$ **b)** $y=x^4$ i $y=x^3$ **c)** $x+(y-1)^2=1$ i $x=0$

5. Zmień kolejność całkowania i oblicz (prostszą wersję). **z)** $\int_0^{2\pi}\int_1^e (\sin y)x^{1/x}\,dxdy$

a) $\int_2^3\int_0^{\sqrt{y}} x^3\,dxdy$ **b)** $\int_1^2\int_1^y xy\,dxdy$ **c)** $\int_{-1}^1\int_{|y|-1}^{1-|y|} x+y^2\,dxdy$ **d)** $\int_1^2\int_{2-x}^{x^2} 1\,dydx$

e) $\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt[3]{x}} 6x+y\,dydx$ **f)** $\int_{-2}^2\int_0^{4-x^2} y+2\,dydx$ **g)** $\int_0^2\int_0^{4-x^2} 3x\,dydx$ **h)** $\int_1^2\int_3^5\int_6^9 z\,dxdydz$

6. Oblicz: **a)** $\iint\limits_L xy\,d\omega$, gdy L jest trójkątem o wierzchołkach $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,-1)$

b) $\iint\limits_T e^x\,d\omega$, T - trapez o wierzchołkach $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$, $(3,0)$