

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. POWTÓRKA. Drzewiej bywało (na egzaminach)

1. Wyznacz długość krzywej zadanej parametrycznie

$$x(t) = 9^{-t} \cos(\pi t), \quad y(t) = 9^{-t} \sin(\pi t), \quad t \in [0, +\infty).$$

Pod jakim kątem krzywa ta przecina okrąg o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu $\frac{1}{3}$?

2. Oblicz pole powierzchni i objętość bryły opisanej układem nierówności

$$z \geq 0, \quad y \geq z, \quad x^2 + y^2 \leq 4.$$

3. Oblicz $\int_K 3x^2 y dx + 2x^3 dy$, gdzie K jest brzegiem obszaru $\{(x, y) : x^2 \leq y \leq 2-x^2\}$

4. Wyznacz wartość największą i najmniejszą f-cji $f(x, y) = x^2 + 2x - 8 - y^2 + 4y$ określonej na $[-3, 3]^2$. Podaj wszystkie punkty, w których te wartości są przyjmowane

5. Wyznacz środek ciężkości półkuli $x^2 + y^2 + z^2 \leq 6x, z \leq 0$, której gęstość g jest proporcjonalna do kwadratu odległości od osi półkuli i osiąga największą wartość 3.

6. Zbadaj ciągłość funkcji $f(x, y) = \begin{cases} (e^{x^2 y^3} - 1)x^{-2} & \text{dla } x \neq 0 \\ 2y^3 - 5y^2 + 6y & \text{dla } x = 0 \end{cases}$ (uzasadnij).

7. Znajdź (i uzasadnij) kres górny i kres dolny wartości funkcji f przy podanych warunkach i znajdź wszystkie argumenty, w których te kresy są przyjmowane, gdy:

a) $f(x, y) = x^2 y$ gdy $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$.

b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ gdy $x^2 + y^2 = z$ i $x + y = 1$.

B1. Niech l oznacza prostą w przestrzeni opisaną równaniem $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 0$. Płaszczyzny styczne do powierzchni $z + xy = x^3 + y$ w punktach $(0, 1, 1), (-1, -2, -5)$ wycinają z prostej l odcinek. Znajdź jego długość.

B2. Oblicz objętość bryły opisanej układem nierówności

$$z \leq x^2 + y^2, \quad z + 4 \geq 2x^2 + 2y^2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$$

B3. a) Oblicz całkę krzywoliniową nieskierowaną $\int_K |y| ds$ po okręgu $K = o((0, 1), 2)$.

b) Dokonaj zmiany kolejności całkowania: $\int_0^2 \int_{-x}^x x dy dx$. Oblicz obydwie całki.

B4. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x, y) = 3x + 4y + 5(x^2 + y^2)$ na zbiorze $Z = \{(x, y) : x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 = x^2 + y^2\}$. Wyznacz wszystkie punkty, w których te wartości są przyjmowane.

B5. Kula $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ ma gęstość g proporcjonalną do odległości od środka kuli i na brzegu kuli przyjmuje wartość $\frac{9}{8}$. Kula obraca się względem prostej przechodzącej przez punkty $(0, 0, 2), (0, 2, 2)$ ze stałą prędkością kątową ω . Wyznacz energię kinet.

B6. Zbadaj istnienie granicy funkcji f, g, h w punkcie $p_0 = (0, 0)$, gdzie

$$f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}, \quad g(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}, \quad h(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^4 + y^4}.$$

Uzasadnij odpowiedź.

C1. W ukł. współrzędnych zaznacz linie opisane parametrycznie (podaj ich nazwy)

a) $x(t) = |\cos(2\pi t)|, y(t) = \sin(2\pi t), t \in [-1, 2]$.

b) $x(t) = 2 \cos(2\pi t), y(t) = 3 \sin^2(2\pi t), t \in [-1, 2]$.

c) $x(t) = 2 \cos^2(2\pi t), y(t) = 3 \sin^2(2\pi t), t \in [-1, 2]$.

C2. Przyjmijmy, że dziedziną f-cji $f(x, y) = x + y$ jest $D = \{(x, y) : x^2 + xy + y^2 = 1\}$. Zbadaj w których z poniższych punktów funkcja f osiąga maksima lokalne, a w których minima lokalne: $A(1, -1), B(1, 1), C(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), D(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$?

C3. Niech Γ oznacza brzeg obszaru $S = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x, y \geq 0\}$. Oblicz:

a) całkę krzywoliniową $\int_{\Gamma} e^{[x+2]} + [y+3] ds$ b) całkę podwójną $\iint_S e^{[x^2+y^2]} d\omega$

c) $\int_{\Gamma} (3y^2 - e^{\sin x}) dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) dy$, gdzie Γ jest okręgiem $x^2 + y^2 = 9$

d) $\int_L y dx + z dy + x dz$, gdzie L jest łamaną $ABC : A(0, 0, 0), B(2, 2, 0), C(0, 1, 1)$.

C4. Oblicz masę stożka o pr. podstawy $R = 1$ i wys. $H = 2$, którego gęstość jest funkcją liniową odległości od podstawy: 0 przy podstawie, 1 przy wierzchołku.

D1. Wyznacz wszystkie punkty, w których ciągła jest funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{x^3 y^2} - 1}{x^3} & \text{dla } x \neq 0 \\ 2y^3 + y^2 - 6y & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

D2. Linie: $x^2 + 2y^2 = 3$ i $y^5 + 3xy^2 + 2x^3 = 4$ przecinają się w punkcie $(1, -1)$. Pod jakim kątem?

D3. Drut D o kształcie półokręgu o promieniu 3 ma stałą gęstość równą 5. W jakiej odległości od końców D leży jego środek ciężkości?

D4. Oblicz pole części powierzchni sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ zawartej w zbiorze $Z = \{(x, y, z) : \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \leq z\}$.

D5. Niech S oznacza stożek o promieniu podstawy 1 i wysokości 2. Niech ℓ oznacza prostą przechodzącą przez wierzchołek stożka i prostopadłą do jego osi. Stożek obraca się wokół ℓ w stałym tempie 5 obrotów na sekundę. Gęstość stożka jest wprost proporcjonalna do sześcianu odległości od jego osi i 7 jest jej największą wartością. Oblicz (do końca) energię kinetyczną tego stożka (Wsk. w ukł. cylindr.).

D6. Niech $K = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}, L = \{(x, y) : x^2 \leq 1, y = 0\}, M = \{(x, y) : y = |x| - 1, x^2 \leq 1\}$ oznaczają krzywe skierowane od $(-1, 0)$ do $(1, 0)$. Oblicz: $\int_K P dx + Q dy, \int_M P dx + Q dy$ wiedząc, że $Q'_x - P'_y = 5 + x^{17}$ i $\int_L P dx + Q dy = \sqrt{2}$.

D7. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą (o ile istnieją) funkcji $f(x, y) = |x^2 + y^2 - 25| + 3x + 4y$ na zbiorze $W = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 10^2\}$. Wyznacz wszystkie punkty, w których te wartości są przyjmowane.