

## Wstęp do matematyki (lato 2024)

### Lista zadań nr 8 (na ćwiczenia 6.05.2024)

1. Rozważmy funkcję  $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  daną wzorem  $f(n, k) = nk + 1$ . Podaj przykład nieskończonego zbioru  $C \subseteq \mathbb{N}^2$ , takiego że funkcja  $f \upharpoonright C$  jest różnowartościowa. Odpowiedź uzasadnij.

2. Mamy dane funkcje:

$$(a) f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 - 1}, g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{x+1};$$

$$(b) f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+1}{x-2}, g : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{2x}{x-4}.$$

Sprawdź, czy wykonalne są złożenia funkcji  $f \circ f$ ,  $f \circ g$ ,  $g \circ f$ ,  $g \circ g$ . Jeżeli odpowiedź jest pozytywna – wyznacz wzór złożenia.

3. Rozważmy funkcję  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zadaną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{jeśli } x < 0 \\ x - 2 & \text{jeśli } x \geq 0. \end{cases}$$

Wyznacz funkcję  $f \circ f$ .

4. Niech  $f : X \rightarrow Y$  oraz  $g : Y \rightarrow Z$ .

(a) Udowodnij, że jeśli  $f$  jest różnowartościowa i  $g$  jest różnowartościowa, to  $g \circ f$  jest różnowartościowa.

(b) Udowodnij, że jeśli  $f$  jest „na” i  $g$  jest „na”, to  $g \circ f$  jest „na”.

5. Niech  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie zadaną wzorem  $f(x) = x^2$  oraz niech  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

(a) Załóżmy, że  $g$  jest różnowartościowa. Czy  $f \circ g$  może być różnowartościowa? A  $g \circ f$ ?

(b) Załóżmy, że  $g$  jest surjekcją. Czy  $f \circ g$  może być surjekcją? A  $g \circ f$ ?

Odpowiedzi uzasadnij.

6. Niech  $f : X \rightarrow Y$  oraz  $g : Y \rightarrow Z$ . Udowodnij, że jeśli  $g \circ f$  jest różnowartościowa i  $f$  jest „na”, to  $g$  jest różnowartościowa.

7. Rozważmy funkcję  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  daną wzorem  $f(x) = x^2 - 3x$ . Zdefiniuj funkcję  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tak, by funkcja  $f \circ g$  była injekcją.

8. Wyznacz funkcje odwrotne do poniższych funkcji:

$$(a) f : \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(2x + 1);$$

$$(b) g : (-\infty, 0] \rightarrow [0, +\infty), g(x) = x^2;$$

$$(c) F : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}), F(A) = A^T.$$

9. Dobierz przeciwdziedzinę funkcji  $f \upharpoonright C$ , określonej w zadaniu 1, tak by miała ona funkcję odwrotną i wyznacz tę funkcję odwrotną.