PROBABILITY
AND
MATHEMATICAL STATISTICS
Vol. 17, Fasc. 2 (1997), pp. 197–221

20

QUELQUES PROPRIÉTÉS EXTRÉMALES DES VALEURS SINGULIÈRES D'UN OPÉRATEUR COMPACT ET LEURS APPLICATIONS AUX ANALYSES FACTORIELLES D'UNE PROBABILITÉ OU D'UNE FONCTION ALÉATOIRE

I. QUELQUES PROPRIÉTÉS EXTRÉMALES DES VALEURS SINGULIÈRES D'UN OPÉRATEUR COMPACT

PAR

ALAIN POUSSE ET JEAN-JACQUES TÉCHENÉ (PAU)

Abstract. We give global criteria for the canonical reductions of an unnecessary self-adjoint operator on a complex separable Hilbert space. These criteria are obtained by an extension of the Poincaré separation theorem for the eigenvalues of a Hermitian matrix. We derive extremal properties of the singular values of a compact operator, thus generalizing known results in finite dimension (cf. [3], [10], [11]) and the recent results by Göhberg and Krejn [7]. Our goal is to find criteria for the factor analysis of a probability defined on a separable Hilbert space or of a real random function other than a finite or countable set of real random variables.

1. INTRODUCTION ET NOTATIONS

Les opérateurs compacts dans un espace de Hilbert possèdent de remarquables propriétés spectrales (cf. [1], [4], [5]) et leurs valeurs singulières vérifient des caractères d'extrémalité sur lesquelles se fondent en particulier de nombreux critères d'analyses factorielles en probabilités ou en statistique. Bien souvent, ces caractères ne sont étudiés qu'en dimension finie pour une application immédiate. Mais il est nécessaire de définir des analyses factorielles dans un cadre aussi large que possible de manière à mieux comprendre certaines de leurs propriétés ou les appliquer à des processus aléatoires assez généraux (cf. [2]). De ce point de vue, le cadre hilbertien est plus satisfaisant que le cadre euclidien et matriciel.

Dans cet article, nous nous intéressons, dans le cadre des espaces de Hilbert séparables, à des critères globaux de réduction canonique d'un opérateur compact, non-nécessairement auto-adjoint. Nous en déduisons plusieurs caractères extrémaux des valeurs singulières d'un opérateur compact généralisant, pour certaines, des propriétés connues dans un cadre matriciel (cf. [3], [10], [11]) et avec une formulation sensiblement plus précise, et pour d'autres, des résultats établis par Göhberg et Krejn [7].

L'approche utilisée est originale. Elle se fonde sur deux problèmes importants d'optimisation définis à l'aide de la famille des normes symétriques $\|\cdot\|_p$ ($p \in [1, +\infty]$) sur l'espace des opérateurs compacts sur un espace de Hilbert complexe séparable H, et que nous résolvons à l'aide d'une extension dans ce cadre du théorème de Poincaré de séparation des valeurs propres d'une matrice hermitienne.

Etant donné un opérateur compact T défini sur H, le premier problème consiste en la recherche d'un sous-espace F de dimension finie q fixée de H tel que $\|T_F\|_p$ ou $\|P \circ T_F\|_p$ soit maximum, P et T_F désignant respectivement le projecteur orthogonal sur F et la restriction de T au sous-espace F, ou plus généralement en la recherche d'un couple (F, F') de sous-espaces de dimensions finies fixées q et q' ($q' \geqslant q$) tels que $\|P' \circ T \circ P\|_p$ soit maximum, P et P' désignant respectivement les projecteurs orthogonaux sur F et F'. La solution est indépendante du réel $p \geqslant 1$ choisi: il faut et il suffit que F et F' soient engendrés respectivement par q premiers vecteurs propres de $T^* \circ T$ et q' premiers vecteurs propres de $T \circ T^*$. Le second consiste en la recherche d'un opérateur U de rang fini fixé tel que $\|T - U\|_p$ soit minimum, généralisant le cas $p = 2$ bien connu dans le cadre euclidien et matriciel (cf. [3], [10]). Nous établissons notamment que, pour chaque réel $p \geqslant 1$, ce minimum est atteint si et seulement si U est le développement de Schmidt d'ordre q de T, complétant ainsi sensiblement un théorème établi par Göhberg et Krejn [7]. Nous accordons également une attention particulière au cas $p = \infty$, complétant encore sur ce point le travail de Göhberg et Krejn [7].

Dans tout ce qui suit, on désigne par $H, H', H'', \ldots$ des espaces de Hilbert complexes séparables de produits scalaires notés indistinctement $(\cdot \mid \cdot)$, de normes associées $\|\cdot\|$. Le supplémentaire orthogonal de tout sous-espace vectoriel fermé Z de H (ou de $H', \ldots$) sera noté $Z^\perp$.

Nous désignerons par $L(H, H')$ — ou $L(H)$, lorsque $H' = H$ — l'espace de Banach des opérateurs (ou applications linéaires) continus de H dans H' muni de la norme de la convergence uniforme $|||\cdot|||$. Un élément de $L(H)$ sera encore appelé un *opérateur continu* sur H. L'adjoint de tout opérateur continu T de H dans H' sera noté T^*; T est dit *auto-adjoint* si $T^* = T$ ($H' = H$), et *normal* si $T^* \circ T = T \circ T^*$. Pour tout sous-espace F de H, nous noterons T_F la restriction de T à F, c'est-à-dire l'application de F dans H' qui à tout x de F associe son image Tx par T.

Un élément auto-adjoint T de $L(H)$ sera dit *positif* si la forme quadratique qui à tout u de H associe le réel $(Tu \mid u)$ est positive: on notera alors $T \succcurlyeq 0$ (ou $0 \preccurlyeq T$), $\preccurlyeq$ désignant l'ordre de Loewner sur $L(H)$. Nous nommerons *projecteur orthogonal de* H tout élément P de $L(H)$ idempotent et positif. Tout projecteur orthogonal P non-nul est tel que $|||P||| = 1$, et l'image de P est un sous-espace fermé de H. Pour chaque sous-espace vectoriel fermé F de H, nous appellerons projecteur orthogonal de H sur F le projecteur orthogonal P de H d'image F (de noyau $F^{\perp}$). Enfin, pour chaque élément auto-adjoint positif T de $L(H)$, nous noterons $T^{1/2}$ l'unique élément auto-adjoint positif de $L(H)$ vérifiant $(T^{1/2})^2 = T$.

1.1. Décomposition polaire et valeurs singulières d'un opérateur continu. Il est d'usage d'appeler *isométrie partielle de H* dans H' tout opérateur continu U de H dans H' tel qu'il existe un sous-espace vectoriel fermé Z de H, nommé *ensemble initial de* U, vérifiant:

(i) $(\forall v \in Z)\ \|Uv\| = \|v\|$;

(ii) $(\forall v \in Z^{\perp})\ Uv = 0$.

Si P est le projecteur orthogonal de H sur Z, il s'ensuit que U, U^* et P sont liés par les relations

$$U^* \circ U = P \quad \text{et} \quad U \circ P = U.$$

Tout opérateur continu T de H dans H' peut s'écrire sous la forme $T = U \circ T'$, dite *décomposition polaire de T*, où

$$T' = (T^* \circ T)^{1/2},$$

et où U est une isométrie partielle de H dans H', d'ensemble initial l'adhérence $\overline{\operatorname{Im} T'}$ de $\operatorname{Im} T'$ dans H (cf. [6]).

Les valeurs propres de T' — quand elles existent — sont des *réels positifs* (en tant que valeurs propres d'un opérateur auto-adjoint positif) et nommées *valeurs singulières de T*. Si T est auto-adjoint, ses valeurs singulières coïncident alors avec les valeurs absolues des valeurs propres de T. On notera que, si H' est plongé dans un autre espace H'', alors T est un élément de $L(H, H'')$, dont l'adjoint $T^{\#}$ est $T^{\#} = T^* \circ P$, où P est le projecteur orthogonal de H'' sur H', et donc

$$T^{\#} \circ T = T^* \circ P \circ T = T^* \circ T.$$

Il s'ensuit que les valeurs singulières de T ne sont pas modifiées si l'on plonge l'espace d'arrivée de T dans un autre espace de Hilbert séparable.

1.2. Quelques propriétés spectrales d'un opérateur compact. Nous désignons par $\sigma_\infty(H, H')$ — ou par $\sigma_\infty(H)$, lorsque $H' = H$ — l'ensemble des opérateurs compacts de H dans H'. Nous utiliserons quelques propriétés usuelles des opérateurs compacts, notamment (cf. [1], [4], [5]):

1. Tout opérateur de rang fini de H dans H' est compact et l'ensemble des opérateurs de rang fini est dense dans $\sigma_\infty(H, H')$ muni de la norme de la convergence uniforme.

2. La décomposition polaire de tout élément T de $\sigma_\infty(H, H')$ s'écrit $T = U \circ (T^* \circ T)^{1/2}$, où $T' = (T^* \circ T)^{1/2}$ appartient à $\sigma_\infty(H)$; de ce fait, sauf mention explicite du contraire, on s'intéressera par la suite au cas où $H' = H$.

3. $\sigma_\infty(H)$ est un idéal bilatère fermé dans l'anneau des opérateurs continus sur H.

4. Le sous-espace propre $E(\lambda)$ de chaque valeur propre *non-nulle* λ d'un opérateur compact T sur H est de dimension *finie* et les sous-espaces propres associées à deux valeurs propres distinctes sont *orthogonaux*.

5. Si $\{\lambda_i(T)\}_{i\in I}$ désigne la suite *pleine* décroissante des valeurs propres *strictement positives* d'un opérateur compact auto-adjoint positif T sur H (i.e. chacune répétée un nombre de fois égal à la dimension du sous-espace propre associé), et si $\{\lambda'_k(T)\}_{k\in K}$ désigne la suite *strictement* décroissante des valeurs propres *strictement positives* de T, on a

(a) $|||T||| = \lambda_1(T) = \lambda'_1(T)$;

(b) pour tout $k \geqslant 2$ de K, $\lambda'_k = \sup\{(Tx\,|\,x)\colon x \in S_{k-1}\}$, où S_{k-1} est la sphère-unité du supplémentaire orthogonal dans H de la somme directe

$$E(\lambda'_1)\oplus \dots \oplus E(\lambda'_{k-1}).$$

1.3. Les espaces σ_p $(p\in[1, +\infty])$. Soient c_0 l'ensemble des suites complexes de limite nulle et Φ_p l'application de c_0 dans $\mathbb{R}^d\cup\{+\infty\}$ définie par

$$\Phi_p(\xi) = \Big[\sum_{j\in N^*} |\xi_j|^p\Big]^{1/p} \text{ si } p\in[1, +\infty[, \qquad \Phi_\infty(\xi) = \sup\{|\xi_j|\colon j\in N^*\},$$

où $\xi = \{\xi_j\}_{j\in N^*}$ appartient à c_0. Nous définissons $\sigma_p(H)$ comme l'ensemble des opérateurs compacts T sur H pour lesquels $\Phi_p(s) < +\infty$, où $s = \{s_j(T)\}_{j\in N^*}$ désigne la suite pleine décroissante des valeurs singulières de T (éventuellement complétée de 0 si T est de rang fini).

Dans toute la suite, $I, J, K, \dots$ désignent systématiquement N^* ou des sections commençantes de N^* (i.e. $I = \{1, \dots, n\}$, etc. ...), et $\{s_j(T)\}_{j\in J}$ la suite *pleine* décroissante des valeurs singulières d'un opérateur compact T sur H.

L'ensemble $\sigma_p(H)$ est un idéal normé séparable pour la norme $\|T\|_p = \Phi_p(s)$ dans l'anneau $L(H)$ (cf. [7]); ainsi $\sigma_\infty(H)$ coïncide avec l'ensemble des opérateurs compacts sur H et $\|T\|_\infty = |||T|||$. De plus, on dispose des propriétés suivantes (cf. [7]):

1. $(\forall(p, q)\in(\mathbb{R}^+)^2,\ 1 \leqslant p \leqslant q)$ $\sigma_1(H) \subset \sigma_p(H) \subset \sigma_q(H) \subset \sigma_\infty(H)$.
2. $(\forall(p, q)\in(\mathbb{R}^+)^2,\ 1 \leqslant p \leqslant q)(\forall T\in\sigma_p(H))$ $\|T\|_q \leqslant \|T\|_p$.
3. $(\forall S\in\sigma_p(H))(\forall T\in\sigma_q(H))$ $S\circ T\in\sigma_r(H)$, où $r = (1/p+1/q)^{-1} \geqslant 1$.
4. $(\forall T\in\sigma_\infty(H))(\forall A\in L(H))(\forall j\in J)$:

(a) $s_j(A\circ T) \leqslant |||A|||\, s_j(T)$, $s_j(T\circ A) \leqslant |||A|||\, s_j(T)$;

(b) si A est de rang q, $s_{j+q}(T) \leqslant s_j(A+T) \leqslant s_{j-q}(T)$.

5. $(\forall T\in\sigma_p(H))(\forall(A, B)\in L(H)\times L(H))$ $\|A\circ T\circ B\|_p \leqslant |||A|||\,\|T\|_p\,|||B|||$.
6. Pour tout couple (A, B) d'opérateurs compacts sur H, auto-adjoints et vérifiant $0 \preccurlyeq A \preccurlyeq B$, on a

$$(\forall i\in I)\ \lambda_i(A) \leqslant \lambda_i(B).$$

Ces relations sont toutes des égalités si et seulement si $A = B$.

7. Les éléments de $\sigma_1(H)$ sont nommés *opérateurs nucléaires* sur H. Si T, élément de $\sigma_1(H)$, est auto-adjoint et positif, alors la trace de T, notée $\mathrm{tr}(T)$, est égale à $\|T\|_1$. De plus, si (S, T) est un couple de $\sigma_p(H)\times\sigma_q(H)$, où $1/p+1/q = 1$, alors

$$\mathrm{tr}(S\circ T) = \mathrm{tr}(T\circ S).$$

8. Les éléments de $\sigma_2(H)$ sont appelés *opérateurs de Hilbert–Schmidt* sur H; muni du produit scalaire

$$(S\,|\,T)_2 = \mathrm{tr}(S\circ T^*) = \mathrm{tr}(T^*\circ S),$$

$\sigma_2(H)$ est un espace de Hilbert complexe séparable.

Nous noterons $\sigma_p(H, H')$ l'ensemble des opérateurs compacts T de H dans H', de décomposition polaire $T = U\circ T'$, pour lesquels T appartient à $\sigma_p(H)$, et nous avons alors

$$\|T\|_p = \|T'\|_p.$$

Les propriétés précédentes s'étendent ainsi, moyennant quelques aménagements évidents, à $\sigma_p(H, H')$.

Nous utiliserons la *décomposition de Schmidt* de tout élément T de $\sigma_\infty(H, H')$ sous la forme suivante (cf. [7]):

$$T = \sum_{j\in J} s_j(T)\, e_j\otimes f_j \quad \text{(au sens de la convergence uniforme)},$$

où (i) $\{e_j\}_{j\in J}$ [resp. $\{f_j\}_{j\in J}$] est une famille orthonormale de H [resp. H'] formée de vecteurs propres de $T^*\circ T$ [resp. $T\circ T^*$], e_j [resp. f_j] étant associé à la valeur propre $s_j^2(T)$ de $T^*\circ T$;

(ii) pour chaque couple (x, y) de $H\times H'$, $x\otimes y$ désigne l'opérateur de rang 1 de H dans H' défini par $u\to(x\,|\,u)\,y = x\otimes y(u)$.

Enfin, nous disposons (cf. [7]) de la

PROPOSITION 1.1. *Soient T un élément de $\sigma_p(H)$ ($p\in[1, +\infty[$) et $\{e_i\}_{i\in I}$ un système orthonormal de H. Alors, on a*

$$\sum_{i\in I} (Te_i\,|\,e_i)^p \leqslant (\|T\|_p)^p,$$

et cette relation est une égalité si et seulement si T est normal et si $\{e_i\}_{i\in I}$ est une base de H formée de vecteurs propres de T.

1.4. Quelques résultats d'optimisation convexe. Nous utiliserons par la suite les deux résultats suivants (cf. [9]):

PROPOSITION 1.2. *Soient f une application convexe de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant $\lim_{-\infty} f = 0$, et $\{a_i\}_{i\in I}$ et $\{b_i\}_{i\in I}$ deux suites décroissantes de réels ($I = \mathbf{N}^*$ ou une section commençante de $\mathbf{N}^*$) telles que*

$$(\forall k\in I)\ \sum_{i=1}^{k} a_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} b_i.$$

Alors: (i) $(\forall k \in I)\ \sum_{i=1}^{k} f(a_i) \leqslant \sum_{i=1}^{k} f(b_i)$;

(ii) *si de plus f est strictement convexe sur un intervalle contenant les suites $\{a_i\}_{i\in I}$ et $\{b_i\}_{i\in I}$, on a l'équivalence*

$$\sum_{i\in I} f(a_i) = \sum_{i\in I} f(b_i) \Leftrightarrow (\forall i \in I)\ a_i = b_i.$$

PROPOSITION 1.3. *Soient D le domaine de $\mathbb{R}^n$ défini par*

$$D = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\colon\ x_n \leqslant x_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant x_1\}$$

et f une application de D dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles $\partial f/\partial x_j$ continues sur D telles que, sur l'intérieur $\mathring{D}$ de D:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} > \frac{\partial f}{\partial x_2} > \ldots > \frac{\partial f}{\partial x_n} > 0.$$

Alors, pour toutes suites décroissantes de réels $\{a_i\}_{i\in I}$ et $\{b_i\}_{i\in I}$ ($I = N^*$ ou une section commençante de N^*), les inégalités

$$(\forall k \in \{1, \ldots, n\})\ \sum_{i=1}^{k} a_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} b_i$$

entraînent

$$f(a_1, \ldots, a_n) \leqslant f(b_1, \ldots, b_n);$$

pour que cette relation soit une égalité, il faut et il suffit que

$$(\forall i \in \{1, \ldots, n\})\ a_i = b_i.$$

Remarque importante. On vérifie aisément que la conclusion de cette proposition subsiste lorsque l'on remplace la condition $\partial f/\partial x_n > 0$ par la condition

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Il en est de même si l'on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} > \frac{\partial f}{\partial x_2} > \ldots > \frac{\partial f}{\partial x_n} > 0$$

sur une partie convexe Δ de l'ouvert

$$D' = \{x = (x_1, \ldots; x_n) \in \mathbb{R}^n\colon\ x_n < x_{n-1} < \ldots < x_1\}$$

de $\mathbb{R}^n$ contenant les points $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$.

2. RÉDUCTIONS CANONIQUES D'OPÉRATEURS COMPACTS

Dans toute cette section, T désigne un opérateur compact de H dans H' (H' pouvant coïncider avec H); autrement dit, un élément de $\sigma_\infty(H, H')$, de développement de Schmidt de T (les notations étant celles de la section 1):

$$T = \sum_{i\in I} s_i\, e_i \otimes f_i.$$

Pour tout k de I, on pose:

$$T_k = \sum_{i=1}^{k} s_i e_i \otimes f_i, \quad T_k^* = \sum_{i=1}^{k} s_i f_i \otimes e_i, \quad P_k = \sum_{i=1}^{k} e_i \otimes e_i, \quad P'_k = \sum_{i=1}^{k} f_i \otimes f_i.$$

Nous nommerons T_k [resp. T_k^*] la *somme partielle d'ordre k du développement de Schmidt de T* [resp. T^*]. On obtient alors les relations:

$$P'_k \circ T = T_k = T \circ P_k, \quad P_k \circ T^* = T_k^* = T^* \circ P'_k,$$

et, si $k \leqslant k'$:

$$T^* \circ T_k = T_k^* \circ T_k = (T^* \circ T)_k = \sum_{i=1}^{k} s_i^2 e_i \otimes e_i,$$

$$T_k \circ T^* = T_k \circ T_k^* = (T \circ T^*)_k = \sum_{i=1}^{k} s_i^2 f_i \otimes f_i.$$

Remarques. 1. Si $s_k = s_{k+1}$, il n'y a pas unicité des opérateurs T_k et P_k (puisque l'on peut modifier le choix de certains e_i ou f_i). On convient alors de désigner par T_k et P_k l'un quelconque de ces opérateurs, et de même pour P'_k.

2. *Expressions matricielles en dimension finie.* Supposons que H et H' soient respectivement les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ rapportés à leurs bases canoniques et munis des produits scalaires $(\cdot|\cdot)_M$ et $(\cdot|\cdot)_N$ de matrices canoniques M et N — ce que l'on notera

$$H = (\mathbb{R}^n, (\cdot|\cdot)_M) \quad \text{et} \quad H' = (\mathbb{R}^p, (\cdot|\cdot)_N).$$

Si T est alors la matrice canonique d'un opérateur de H dans H', les expressions matricielles de P_k et P'_k sont

$$P_k = A\,{}^t\!AM \quad \text{et} \quad P'_k = B\,{}^t\!BN,$$

où $A = (\alpha_1|\ldots|\alpha_k)$ [resp. $B = (\beta_1|\ldots|\beta_k)$] est la matrice dont les vecteurs-colonnes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ [resp. $\beta_1, \ldots, \beta_k$] sont k premiers vecteurs propres M-orthonormés [resp. N-orthonormés] de la matrice de Gram généralisée $\Gamma_n = {}^tTNTM$ [resp. $\Gamma_p = TM\,{}^tTN$]. Les expressions matricielles de T_k et T_k^* s'en déduisent aussitôt.

2.1. Le résultat principal. L'étude qui suit se fonde sur le lemme suivant:

Lemme 2.1. *Si T est un opérateur de H dans H' et si P et Q sont deux projecteurs orthogonaux de H et H' respectivement, on a*:

$$P \circ T^* \circ Q \circ T \circ P \preccurlyeq P \circ T^* \circ T \circ P.$$

En effet, on peut écrire, I_H désignant l'application identique sur H:

$$\begin{aligned} P \circ T^* \circ T \circ P - P \circ T^* \circ Q \circ T \circ P &= P \circ T^* \circ (I_H - Q) \circ T \circ P \\ &= P \circ T^* \circ (I_H - Q) \circ [P \circ T^* \circ (I_H - Q)]^* \succcurlyeq 0. \end{aligned}$$

Le théorème suivant constitue le résultat central de cet article. Il constitue une version étendue au cadre hilbertien du théorème de Poincaré de séparation des valeurs propres d'une matrice hermitienne (cf. [11]):

THÉORÈME 2.2. *Soient T un opérateur compact auto-adjoint sur H, F un sous-espace fermé de H et P le projecteur orthogonal de H sur F. Alors:*

(i) *Les opérateurs $U = P \circ T_F$ (considéré comme opérateur de F dans F) et $P \circ T \circ P$ ont les mêmes valeurs propres non-nulles et sont des éléments auto-adjoints respectivement de $\sigma_\infty(F)$ et $\sigma_\infty(H)$.*

(ii) *Si $\{\lambda_j\}_{j\in J}$ et $\{\mu_j\}_{j\in J'}$ désignent respectivement les suites pleines décroissantes des valeurs propres strictement positives de T et U, on a*

$$(\forall j \in J')\ \ 0 < \mu_j \leqslant \lambda_j.$$

(iii) *Si T est positif et si F est de dimension finie q ($1 \leqslant q \leqslant \operatorname{card} J'$), on a*

$$(\forall j \in \{1, \ldots, q\})\ \ \mu_j = \lambda_j$$

si et seulement si F est engendré par q premiers vecteurs propres de T(1).

(iv) *Si T est positif et si F est un sous-espace fermé de codimension finie $q \geqslant 1$, on a*

$$(\forall j \in J')\ \ \mu_j \geqslant \lambda_{j+q},$$

avec égalité pour tout j de J' si et seulement si F est le supplémentaire orthogonal dans H d'un sous-espace engendré par q premiers vecteurs propres de T.

Démonstration. (i) $\sigma_\infty(H)$ étant un idéal bilatère de $L(H)$, les opérateurs $P \circ T$ et $P \circ T \circ P$ sont compacts ainsi donc que $U = P \circ T_F$; les autres propriétés se vérifient aisément.

(ii) Puisque $|||P||| = 1$, on déduit de la propriété 4 du § 1.3 ci-dessus que

$$(\forall j \in J')\ \ \mu_j = s_j(U) = s_j(P \circ T \circ P) \leqslant s_j(P \circ T) \leqslant s_j(T) = \lambda_j,$$

ce qui donne le résultat cherché.

(iii) Si F est engendré par q premiers vecteurs propres de T, que l'on peut noter, moyennant une renumérotation éventuelle, $e_1, \ldots, e_q$, alors

$$T_q = T \circ P = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i e_i \otimes e_i = P \circ T \circ P,$$

et par conséquent, pour tout i de $\{1, \ldots, q\}$, on a

$$\lambda_i = \lambda_i(P \circ T \circ P) = \lambda_i(U) = \mu_i.$$

Réciproquement, l'opérateur $P \circ T \circ P \circ T \circ P = (P \circ T \circ P) \circ (P \circ T \circ P)^*$ est auto-adjoint positif de rang q et les μ_i^2 ($i = 1, \ldots, q$) sont ses valeurs propres

(1) C'est-à-dire, si $\{\lambda'_k\}_{k=1,\ldots,r}$ désigne la suite *strictement* décroissante associée à la suite $\{\lambda_j\}_{j=1,\ldots,q}$ des q premières valeurs propres (positives) de T, $F = [E(\lambda'_1) \oplus \ldots \oplus E(\lambda'_r)] \oplus G$, où G est un sous-espace de dimension $q - \dim[E(\lambda'_1) \oplus \ldots \oplus E(\lambda'_r)]$.

strictement positives. De même $P \circ T^2 \circ P$ est auto-adjoint positif, et d'après le lemme 2.1:

$$P \circ T \circ P \circ T \circ P \preccurlyeq P \circ T^2 \circ P,$$

d'où il résulte que

$$(\forall i \in \{1, \ldots, q\}) \ \mu_i^2 = \lambda_i(P \circ T \circ P \circ T \circ P) \leqslant \lambda_i(P \circ T^2 \circ P) \leqslant \lambda_i(T^2) = \lambda_i^2,$$

la dernière inégalité s'obtenant (par exemple) en appliquant l'assertion (ii) à T^2. Si, pour tout i de $\{1, \ldots, q\}$, $\mu_i = \lambda_i$, on a donc

$$(\forall i \in \{1, \ldots, q\}) \ \lambda_i(P \circ T \circ P \circ T \circ P) = \lambda_i(P \circ T^2 \circ P),$$

et comme $0 \preccurlyeq P \circ T \circ P \circ T \circ P \preccurlyeq P \circ T^2 \circ P$, il suit clairement

$$P \circ T \circ P \circ T \circ P = P \circ T^2 \circ P.$$

On en déduit que

$$[P \circ T \circ (I_H - P)] \circ [P \circ T \circ (I_H - P)]^* = P \circ T \circ (I_H - P) \circ T \circ P = 0,$$

et par suite que

$$P \circ T \circ (I_H - P) = (I_H - P) \circ T \circ P,$$

ce qui entraîne

$$P \circ T \circ P = P \circ T = T \circ P.$$

Le sous-espace F est donc invariant par T, et P a les mêmes vecteurs propres que T associés aux valeurs propres 1 et 0. Puisque P est de rang q, il existe une partie K de I de cardinal q, telle que

$$P = \sum_{i \in K} e_i \otimes e_i.$$

Il en découle clairement que

$$P \circ T \circ P = \sum_{i \in K} \lambda_i e_i \otimes e_i,$$

et donc nécessairement $K = \{1, \ldots, q\}$.

(iv) Posons $Q = I_H - P$. Alors, on a

$$P \circ T^{1/2} = T^{1/2} - Q \circ T^{1/2},$$

où $Q \circ T^{1/2}$ est de rang inférieur ou égal à q. La propriété 4(b) du § 1.3 implique alors

$$(\forall j \in J') \ s_j(T^{1/2} - Q \circ T^{1/2}) \geqslant s_{j+q}(T^{1/2}),$$

et on en déduit que

$$(1) \qquad (\forall j \in J') \ s_j^2(P \circ T^{1/2}) = \lambda_j(P \circ T \circ P) \geqslant s_{j+q}^2(T^{1/2}) = \lambda_j(T - T_q).$$

D'autre part, d'après le lemme 2.1:

$$0 \preccurlyeq P \circ T^{1/2} \circ P \circ T^{1/2} \circ P \preccurlyeq P \circ T \circ P,$$

et par conséquent

$$(\forall j \in J')\ \lambda_j(P \circ T^{1/2} \circ P \circ T^{1/2} \circ P) \leqslant \lambda_j(P \circ T \circ P).$$

Or $P \circ T^{1/2} \circ P \circ T^{1/2} \circ P = (P \circ T^{1/2} \circ P)^2$, et donc la relation (1) précédente, appliquée à l'opérateur $T^{1/2}$, donne

$$(\forall j \in J')\ \lambda_j[(P \circ T^{1/2} \circ P)^2] = \lambda_j^2(P \circ T^{1/2} \circ P) \geqslant \lambda_j^2(T^{1/2} - T_q^{1/2}) = \lambda_j(T - T_q),$$

d'où il résulte que

$$(2) \quad (\forall j \in J')\ \lambda_j(T - T_q) = \lambda_{j+q} \leqslant \lambda_j(P \circ T^{1/2} \circ P) \leqslant \lambda_j(P \circ T \circ P) = \mu_j.$$

Si F est le supplémentaire orthogonal dans H d'un sous-espace engendré par q premiers vecteurs propres de T, autrement dit, moyennant une renumérotation éventuelle des vecteurs propres de T, si $F = [\mathrm{vect}\{e_1, \ldots, e_q\}]^\perp$, alors on a

$$P \circ T \circ P = T - \sum_{i=1}^{q} \lambda_i e_i \otimes e_i = \sum_{j \in J'} \lambda_{j+q} e_{j+q} \otimes e_{j+q},$$

d'où l'on tire

$$(\forall j \in J')\ \mu_j = \lambda_{j+q}.$$

Réciproquement, si pour tout j de J', $\mu_j = \lambda_{j+q}$, alors, d'après (2), il vient

$$(\forall j \in J')\ \lambda_j(P \circ T^{1/2} \circ P \circ T^{1/2} \circ P) = \lambda_j(P \circ T \circ P),$$

d'où $P \circ T^{1/2} \circ P \circ T^{1/2} \circ P = P \circ T \circ P$, ce qui entraîne

$$[P \circ T^{1/2} \circ (I_H - P)] \circ [P \circ T^{1/2} \circ (I_H - P)]^* = P \circ T^{1/2} \circ (I_H - P) \circ T^{1/2} \circ P = 0,$$

d'où l'on tire que

$$P \circ T^{1/2} \circ (I_H - P) = 0 \quad \text{et} \quad (I_H - P) \circ T^{1/2} \circ P = 0$$

ou encore, comme $Q = I_H - P$, que

$$Q \circ T^{1/2} \circ Q = Q \circ T^{1/2} = T^{1/2} \circ Q.$$

Reprenant le même raisonnement que celui utilisé précédemment lors de la preuve de l'assertion (iii) mais appliqué maintenant à l'opérateur $T^{1/2}$ (dont les vecteurs propres sont ceux de T), on en déduit que Q est le projecteur de H sur *un* sous-espace engendré par q premiers vecteurs propres de T. ∎

2.2. Maximisation de $\|T_F\|_p$ ou de $\|P \circ T_F\|_p$. Dans ce paragraphe, F désigne un sous-espace vectoriel de H de dimension finie *donnée* q (et ultérieurement de dimension finie *au plus égale à q donné*) et P le projecteur orthogonal de H sur F. On considère un opérateur continu T à valeurs dans un espace H', qui dans un premier temps coïncidera avec H. Le rang de T_F (restriction de T à F) est donc inférieur ou égal à q, et par suite $\|T_F\|_p$ et $\|P \circ T_F\|_p$ existent pour chaque p de $[1, +\infty[$. L'objet de notre étude est la recherche des sous-espaces F maximisant $\|T_F\|_p$ ou $\|P \circ T_F\|_p$. Nous en donnerons ensuite plusieurs conséquences.

(a) *T est un élément auto-adjoint positif de $\sigma_\infty(H)$.* Posons $U = P \circ T_F$. L'adjoint de T_F est $P \circ T$, considéré comme élément de $\sigma_\infty(H, F)$; il en résulte que

$$\|T_F\|_p = \|P \circ T\|_p.$$

Comme U et $P \circ T \circ P$ ont les mêmes valeurs propres non nulles, il vient (cf. § 1.3):

$$\|U\|_p = \|P \circ T \circ P\|_p \leqslant \|P \circ T\|_p = \|T_F\|_p. \tag{3}$$

Soit $T_F = \Delta \circ T'$ la décomposition polaire de T_F, l'opérateur T' étant défini par

$$T'^2 = (T_F)^* \circ T_F = (P \circ T) \circ T_F = (P \circ T^2)_F.$$

Si $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ et $\{\gamma_i\}_{i \in I'}$ sont respectivement les suites pleines décroissantes des valeurs propres positives ou nulles de T et T', le théorème 2.2, appliqué à l'opérateur T^2, donne aussitôt

$$(\forall i \in \{1, \ldots, q\}) \;\; \gamma_i^2 \leqslant \lambda_i^2 \qquad (\text{d'où } \gamma_i \leqslant \lambda_i).$$

Il en découle que

$$((\|T_F\|_p)^p = (\|T'\|_p)^p = \sum_{i=1}^{q} \gamma_i^p \leqslant \sum_{i=1}^{q} \lambda_i^p. \tag{4}$$

Rapprochant (3) et (4), on obtient

$$\|U\|_p \leqslant \|T_F\|_p \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i^p\Big)^{1/p} = \|T_q\|_p,$$

où T_q est la somme partielle d'ordre q du développement de Schmidt de T (définie à une équivalence près).

D'autre part, $\{\mu_i\}_{i=1,\ldots,q}$ désignant la suite des valeurs propres (positives) de U, les égalités

$$\|T'\|_p = \|T_F\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i^p\Big)^{1/p} \qquad \Big[\text{resp. } \|U\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i^p\Big)^{1/p}\Big]$$

ont lieu si et seulement si $\gamma_i \leqslant \lambda_i$ [resp. $\mu_i \leqslant \lambda_i$] pour tout i de $\{1, \ldots, q\}$, et donc, par application du théorème 2.2 (iii) à l'opérateur T^2 [resp. T], si et seulement si F est *un* sous-espace engendré par q premiers vecteurs propres de T.

(b) *T est un élément de $\sigma_\infty(H, H')$.* Soit $T = \Delta \circ T'$, où T' est un élément auto-adjoint positif de $\sigma_\infty(H)$ et Δ une isométrie partielle de H dans H' d'ensemble initial l'adhérence $\overline{\operatorname{Im} T'}$ de $\operatorname{Im} T'$, la décomposition polaire de T; celle de T'_F est $T'_F = \Delta' \circ T''$, où T'' est un opérateur compact auto-adjoint positif sur F et Δ' une isométrie partielle de F dans H d'ensemble initial $\overline{\operatorname{Im} T''}$. On a donc

$$T_F = \Delta \circ T'_F = \Delta \circ \Delta' \circ T''.$$

Comme Im T'_F, ensemble d'arrivée de Δ', est inclus dans $\overline{\operatorname{Im} T'}$, ensemble initial de Δ, $\Delta \circ \Delta'$ est une isométrie partielle d'ensemble initial $\operatorname{Im} T''$. Par suite, il vient

$$\|T_F\|_p = \|T''\|_p = \|T'_F\|_p,$$

et maximiser $\|T_F\|_p$ revient donc à maximiser $\|T'_F\|_p$, avec T' élément auto-adjoint de $\sigma_\infty(H)$. L'application de (a) à l'opérateur T' montre que $\|T'_F\|_p$ est maximum si et seulement si F est engendré par q premiers vecteurs propres de T', qui sont aussi q premiers vecteurs propres de $T'^2 = T^* \circ T$; le maximum atteint est $\|T_q\|_p$.

(c) *F est un sous-espace de dimension finie au plus égale à q donné.* Les résultats précédents s'étendent au cas où F est de dimension finie *non fixée* au plus égale à q donné. En effet, si T est élément de $\sigma_\infty(H, H')$ et si G est un sous-espace vectoriel de H de dimension q ($q \leqslant \dim H$) contenant F et si P [resp. Q] est le projecteur orthogonal de H sur F [resp. sur G], on a

$$\|P \circ T^*\|_p \leqslant \|Q \circ T^*\|_p \leqslant \|T_q\|_p,$$

car $P \circ Q = P$. La propriété cherchée en résulte, étant donné que, si r est inférieur ou égal à q, on a $\|T_r\|_p \leqslant \|T_q\|_p$, l'égalité n'ayant lieu que si $r = q$. La même remarque s'étend au cas (a).

Nous énoncerons donc le théorème suivant:

Théorème 2.3. *Soient $\mathscr{F}_q$ l'ensemble des sous-espaces de H de dimension finie au plus égale à q donné (q fini, $q \leqslant \dim H$) et, pour chaque F de $\mathscr{F}_q$, P le projecteur orthogonal de H sur F. Alors, pour tout réel $p \geqslant 1$:*

(a) *Si T est un élément auto-adjoint positif de $\sigma_\infty(H)$, le maximum de $\|P \circ T_F\|_p$ et de $\|T_F\|_p$ quand F décrit $\mathscr{F}_q$ est obtenu si et seulement si F est un sous-espace de H engendré par q premiers vecteurs propres de T; le maximum atteint est égal à $\|T_q\|_p$ dans les deux cas.*

(b) *Si T est un élément de $\sigma_\infty(H, H')$, pour que $\|T_F\|_p$ soit maximum lorsque F décrit $\mathscr{F}_q$, il faut et il suffit que F soit un sous-espace engendré par q premiers vecteurs propres de $T^* \circ T$; le maximum est encore égal à $\|T_q\|_p$.*

Remarques. 1. Dans le cas où T est un élément auto-adjoint positif de $\sigma_\infty(H)$, on peut avoir

$$\|P \circ T_F\|_p = \|T_F\|_p < \|T_q\|_p.$$

Cette relation a lieu si et seulement si $\mu_i^2 = \gamma_i^2$ pour tout i, ce qui revient, en vertu de la propriété 6 du § 1.3, à

$$P \circ T \circ P \circ T \circ P = P \circ T^2 \circ P.$$

La fin de la démonstration du théorème 2.2 conduit alors à un projecteur P de la forme

$$P = \sum_{i \in K} s_i e_i \otimes e_i,$$

où $\operatorname{card} K = q$. Tout K tel que l'une au moins des valeurs propres de la famille $\{\lambda_i\}_{i\in K}$ n'appartienne pas à $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_q\}$ répond à la question puisqu'alors

$$(\|P \circ T_F\|_p)^p = (\|T_F\|_p)^p = \sum_{i\in K} \lambda_i^p < \sum_{i=1}^{q} \lambda_i^p = \|T_q\|_p.$$

2. Lorsque $p = \infty$ et que T est encore auto-adjoint positif, on a toujours les inégalités

$$\mu_1 = \|P \circ T_F\|_\infty \leqslant \|T_F\|_\infty \leqslant \|T_q\|_\infty = \lambda_1.$$

La relation $\|P \circ T_F\|_\infty = \|T_q\|_\infty$ [resp. $\|T_F\|_\infty = \|T_q\|_\infty$] a donc lieu si et seulement si $\mu_1 = \lambda_1$ [resp. $\gamma_1 = \mu_1$], ce qui équivaut à dire que F contient un premier vecteur propre de T (ou de $T^* \circ T$ dans le cas (b)).

Corollaire 2.4. *Soient T un élément de $\sigma_\infty(H, H')$ et P [resp. P'] un projecteur orthogonal de H [resp. H'] de rang fini au plus égal à un entier q donné. Alors*:

(i) $T \circ P = T_q$ *équivaut à* $P = P_q$;

(ii) $P' \circ T = T_q$ *équivaut à* $P' = P'_q$.

En effet, si $F = \operatorname{Im} P$ et $T \circ P = T_q$, on a

$$\|T_F\|_p = \|P \circ T^*\|_p = \|T_q\|_p,$$

d'où $P = P_q$ d'après la proposition précédente; la réciproque est immédiate et (ii) se déduit de (i) par passage aux adjoints. ∎

2.3. Maximisation de $\|P' \circ T \circ P\|_p$. La proposition suivante constitue une extension du théorème 2.3 dont on conserve les notations. On désigne par T un opérateur compact de H dans H', par $\mathscr{F}_q$ [resp. $\mathscr{F}'_q$] l'ensemble des sous-espaces vectoriels de H [resp. H'] de dimension finie au plus égale à q [resp. q'] donné, et pour tout couple (F, F') de $\mathscr{F}_q \times \mathscr{F}'_{q'}$, par P et P' les projecteurs orthogonaux sur F et F' respectivement:

Proposition 2.5. *Pour chaque réel $p \geqslant 1$, le maximum de $\|P' \circ T \circ P\|_p$ ou de $\|P' \circ T_F\|_p$ lorsque (F, F') décrit $\mathscr{F}_q \times \mathscr{F}_{q'}$ (avec $q' \geqslant q$) est obtenu si et seulement si F est engendré par q premiers vecteurs propres de $T^* \circ T$ et si F' contient un sous-espace engendré par q premiers vecteurs propres de $T \circ T^*$. Le maximum atteint est égal à $\|T_q\|_p$.*

En effet:

$$\|P' \circ T \circ P\|_p \leqslant \|T \circ P\|_p = \|T_F\|_p \leqslant \|T_q\|_p,$$

et, en vertu du théorème 2.3, la dernière inégalité est une égalité si et seulement si $P = P_q$. Alors, comme $q' \geqslant q$, il suit

$$\|P' \circ T \circ P\|_p = \|P' \circ T_q\|_p \leqslant \|(T_q)_{q'}\|_p = \|T_q\|_p,$$

avec égalité si et seulement si P' est le projecteur orthogonal sur un sous-espace de H' engendré par q' premiers vecteurs propres de $T_q \circ T_q^*$, autrement dit, si

$\operatorname{Im} P'$ contient *un* sous-espace engendré par q premiers vecteurs propres de $T \circ T^*$ (car $q' \geqslant q$).

Remarques. 1. On obtient un résultat analogue si F' est de dimension infinie, à condition toutefois qu'il soit de codimension finie *fixée*.

2. Si on suppose q' (fini ou non) supérieur ou égal à q, on ramène le problème de la maximisation de $\|P' \circ T \circ P\|_p$ au précédent en remplaçant T par T^*.

Enfin, la proposition suivante apparaît à la fois comme une version plus générale de la proposition 2.5 précédente et une extension (même dans le cadre de la dimension finie) du théorème 2.2 de [11]:

PROPOSITION 2.6. *Soient H_1 et H'_1 deux espaces de Hilbert complexes, T un élément de $\sigma_\infty(H, H')$, U et V deux isométries partielles de H_1 dans H et de H'_1 dans H' respectivement telles que* $\operatorname{Im} U$ *appartienne à $\mathscr{F}_q$ et* $\operatorname{Im} V$ *à $\mathscr{F}'_{q'}$ avec $q' \geqslant q$. Alors, pour tout réel $p \geqslant 1$, pour que $\|V^* \circ T \circ U\|_p$ soit maximum lorsque le couple* $(\operatorname{Im} U, \operatorname{Im} V)$ *décrit $\mathscr{F}_q \times \mathscr{F}'_{q'}$, il faut et il suffit que* $\operatorname{Im} U$ *soit un sous-espace engendré par q premiers vecteurs propres de $T^* \circ T$ et que* $\operatorname{Im} V$ *contienne un sous-espace engendré par q premiers vecteurs propres de $T \circ T^*$; le maximum atteint est égal à $\|T_q\|_p$.*

Démonstration. Soit P [resp. P'] le projecteur orthogonal de H [resp. H'] sur $\operatorname{Im} U$ [resp. $\operatorname{Im} V$]. Comme U et V sont des isométries partielles, on a

$$|||U||| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad |||V||| \leqslant 1.$$

D'autre part, comme $P = U \circ U^*$ [resp. $P' = V \circ V^*$] et que U [resp. V] est à image fermée, U^* [resp. V^*] est égal au pseudo-inverse de Moore–Penrose de U [resp. V] et (cf. [8]):

$$\|P' \circ T \circ P\|_p \leqslant |||V|||\, \|V^* \circ T \circ U\|_p\, |||U^*||| \leqslant \|V^* \circ T \circ U\|_p,$$

où

$$\begin{aligned}\|V^* \circ T \circ U\|_p &= \|(V^* \circ V \circ V^*) \circ T \circ (U \circ U^* \circ U)\|_p \\ &\leqslant |||V^*|||\, \|P' \circ T \circ P\|_p\, |||U||| \leqslant \|P' \circ T \circ P\|_p.\end{aligned}$$

On en déduit la relation

$$\|V^* \circ T \circ U\|_p = \|P' \circ T \circ P\|_p,$$

qui permet de conclure. ∎

2.4. Minimisation de $\|T - U\|_p$, $p \in [1, +\infty]$. On se propose maintenant de minimiser $\|T - U\|_p$ lorsque U décrit l'ensemble $\mathscr{R}_q(H, H')$ des opérateurs de H dans H' de rang fini (non-fixé) au plus égal à q donné dans N^*.

(a) *T appartient à $\sigma_p(H)$, $p \in [1, +\infty[$.* Göhberg et Krejn ont démontré (cf. [7]) que le minimum de $\|T - U\|_p$ lorsque U décrit $\mathscr{R}_q(H, H)$ $(H' = H)$ est atteint lorsque $U = T_q$, somme partielle d'ordre q du développement de

Schmidt de T (opérateur défini à une équivalence près). Nous complétons ce résultat en prouvant que ce minimum est atteint *uniquement* lorsque $U = T_q$. Nous considérons le cas plus général où T appartient à $\sigma_p(H, H')$ et effectuons la démonstration dans ce cadre.

(b) *T appartient à $\sigma_p(H, H')$, $p \in [1, +\infty[$.* L'ensemble $\mathcal{R}_q(H, H')$ est inclus dans $\sigma_p(H, H')$ et donc chaque U de $\mathcal{R}_q(H, H')$ admet une décomposition polaire $U = \varDelta \circ U'$, où U' est élément de $\sigma_p(H)$ et où $\varDelta$ est une isométrie partielle de H dans H' d'ensemble initial $\operatorname{Im} U'$ (U' est d'image fermée car U, et donc U', est de rang fini). L'adjoint $\varDelta^*$ de $\varDelta$ est une isométrie partielle d'ensemble initial $\operatorname{Im} U$ et d'ensemble d'arrivée $\operatorname{Im} U'$. Si P [resp. Π] désigne le projecteur orthogonal de H' [resp. H] sur $\operatorname{Im} U$ [resp. $\operatorname{Im} U'$], il vient donc (cf. § 1.1):

$$\varDelta \circ \varDelta^* = P \quad \text{et} \quad \varDelta^* \circ \varDelta = \Pi.$$

Nous effectuons la démonstration en deux étapes. Dans un premier temps, nous supposons *$\varDelta$ fixé* et nous cherchons U' minimisant $\|T - \varDelta \circ U'\|_p$. On peut écrire

$$T - U = T - \varDelta \circ U' = T - P \circ T + P \circ T - \varDelta \circ U' = (T - P \circ T) + \varDelta \circ (\varDelta^* \circ T - U'),$$

d'où

$$\begin{aligned}(T-U)^* \circ (T-U) = {} & (T - P \circ T)^* \circ (T - P \circ T) \\ & + (\varDelta^* \circ T - U')^* \circ \varDelta^* \circ \varDelta \circ (\varDelta^* \circ T - U') \\ & + (T - P \circ T)^* \circ \varDelta \circ (\varDelta^* \circ T - U') + (\varDelta^* \circ T - U')^* \circ \varDelta^* \circ (T - P \circ T).\end{aligned}$$

Or, comme $\operatorname{Im} \varDelta = \operatorname{Im} U = \operatorname{Ker}(I_{H'} - P)$, on a

$$(T - P \circ T)^* \circ \varDelta \circ (\varDelta^* \circ T - U') = T^* \circ (I_{H'} - P) \circ \varDelta \circ (\varDelta^* \circ T - U') = 0,$$

et, par passage aux adjoints, il vient

$$(\varDelta^* \circ T - U')^* \circ \varDelta^* \circ (T - P \circ T) = 0.$$

De plus:

$$(\varDelta^* \circ T - U')^* \circ \varDelta^* \circ \varDelta \circ (\varDelta^* \circ T - U') = (\varDelta^* \circ T - U')^* \circ (\varDelta^* \circ T - U'),$$

et donc $(T-U)^* \circ (T-U)$ peut s'exprimer sous la forme de la somme de deux opérateurs positifs. De la propriété 6 du § 1.3, il découle donc

$$(\forall i \in I) \quad s_i(T-U) \geqslant s_i(T - P \circ T),$$

et, pour que ces relations soient toutes des égalités, il faut et il suffit que

$$\varDelta^* \circ T - U' = 0.$$

Il en résulte aussitôt que

$$\|T - U\|_p \geqslant \|T - P \circ T\|_p,$$

et pour que cette relation soit une égalité, il est nécessaire et suffisant que

$$U = \Delta \circ \Delta^* \circ T = P \circ T.$$

On est donc ramené à chercher un opérateur U de la forme $U = P \circ T$, où P est un projecteur orthogonal de rang fini au plus égal à q rendant minimum $\|T - P \circ T\|_p$. Posant alors $Q = I_{H'} - P$, il suit

$$\|T - P \circ T\|_p^p = \|Q \circ T\|_p^p = \sum_{j \in J} s_j^p(Q \circ T) = \sum_{j \in J} \lambda_j^{p/2}(Q \circ T \circ T^* \circ Q),$$

où, en vertu de l'assertion (iv) du théorème 2.2 appliquée à l'opérateur $T \circ T^*$:

$$(\forall j \in J) \;\; \lambda_j(Q \circ T \circ T^* \circ Q) \geqslant \lambda_{j+q}(T \circ T^*) = s_{j+q}^2(T) = s_j^2(T - T_q).$$

Il en résulte immédiatement que

$$\|T - P \circ T\|_p^p \geqslant \sum_{j \in J} s_j^p(T - T_q) = \|T - T_q\|_p^p,$$

avec égalité si et seulement si

$$(\forall j \in J) \;\; \lambda_j(Q \circ T \circ T^* \circ Q) = \lambda_{j+q}(T \circ T^*),$$

ce qui équivaut, toujours d'après l'assertion (iv) du théorème 2.2, à $P = P_q'$.

(c) *Le cas* $p = +\infty$. La première partie de la démonstration précédente restant valide, on est encore ramené à chercher un opérateur U de la forme $U = P \circ T$ rendant minimum $\|T - P \circ T\|_\infty$. Or, nous avons

$$\|T - P \circ T\|_\infty = \max\{s_j(Q \circ T) \colon j \in J\} \geqslant \max\{s_{j+q}(T) \colon j \in J\} = s_{q+1}(T),$$

avec égalité si et seulement si

$$\lambda_1(Q \circ T \circ T^* \circ Q) = \lambda_{q+1}(T),$$

ce qui revient à dire que P est le projecteur orthogonal sur un sous-espace de dimension q de H' contenant un premier vecteur propre de $T \circ T^*$. Pour terminer, relevant que pour chaque p de $[1, +\infty]$, on a, si $r < q$:

$$\|T - T_r\|_p > \|T - T_q\|_p,$$

nous pouvons énoncer le

THÉORÈME 2.7. *Soient, pour p appartenant à $[1, +\infty]$, T un élément de $\sigma_p(H, H')$, et $\mathcal{R}_q(H, H')$ l'ensemble des opérateurs de H dans H' de rang fini au plus égal à q donné. Alors*:

(i) *Pour chaque réel $p \geqslant 1$, le minimum de $\|T - U\|_p$ lorsque U décrit $\mathcal{R}_q(H, H')$ est obtenu si et seulement si $U = T_q$, somme partielle d'ordre q du développement de Schmidt de T.*

(ii) *Lorsque $p = \infty$, pour que $\|T - U\|_\infty$ soit minimum lorsque décrit $\mathcal{R}_q(H, H')$, il faut et il suffit que U soit de la forme $U = P \circ T$, où P est le projecteur orthogonal sur un sous-espace vectoriel de dimension q contenant un premier vecteur propre de $T \circ T^*$; le minimum est égal à $s_{q+1}(T)$.*

Remarques. 1. Le cas $p = 2$ est bien connu en dimension finie et dans un cadre matriciel, la norme $\|\cdot\|_2$ correspondant à la norme euclidienne des matrices. Il a donné lieu à des développements et applications importantes en statistique (cf. [3], [10]).

On relèvera que, pour chaque réel $p \geqslant 1$, *la solution est unique à une équivalence près et ne dépend pas du choix de p. La solution n'est unique que si* $s_{q+1}(T) \neq s_q(T)$.

2. L'assertion (ii) constitue une extension sensible du théorème d'Allahverdiev (cf. [7]) qui indique seulement, dans le cas où $H' = H$, que

$$\operatorname{Inf}\{\|T-U\|_\infty \colon U \in \mathscr{R}_q(H)\} = \|T-T_q\|_\infty = s_{q+1}(T).$$

La proposition suivante, conséquence directe du théorème précédent, complète utilement le théorème 2.3:

PROPOSITION 2.8. *Soient un réel $p \geqslant 1$, T un élément de $\sigma_p(H, H')$ et $\mathscr{G}_q$ la famille des sous-espace fermés de H de codimension finie au plus égale à un entier q donné. Alors*:

(i) *Le minimum de $\|T_F\|_p$ lorsque F décrit $\mathscr{G}_q$ est atteint si et seulement si F est le supplémentaire orthogonal dans H d'un sous-espace engendré par q premiers vecteurs propres de $T^* \circ T$.*

(ii) *Si $H' = H$ et si T est auto-adjoint positif, alors, P désignant le projecteur orthogonal de H sur F, pour que $\|P \circ T_F\|_p$ soit minimum lorsque F décrit $\mathscr{G}_q$, il faut et il suffit que F soit le supplémentaire orthogonal dans H d'un sous-espace engendré par q premiers vecteurs propres de T.*

Démonstration. (i) En effet, si l'on pose $Q = I_H - P$, il vient

$$\|T_F\|_p = \|P \circ T^*\|_p = \|T^* - Q \circ T^*\|_p,$$

où $Q \circ T^*$ est un opérateur de H' dans H de rang au plus égal à q; d'après le théorème 2.7 précédent, pour que $\|T_F\|_p$ soit minimum quand F décrit $\mathscr{G}_q$, il faut et il suffit que $Q \circ T^* = T_q^*$, autrement dit, en vertu du corollaire 2.4, que $Q = P_q$, ce qui revient à $P = I_H - P_q$.

(ii) Comme

$$\|P \circ T_F\|_p^p = \|P \circ T \circ P\|_p^p = \|P \circ T^{1/2}\|_{2p}^{2p},$$

cette propriété se déduit de l'assertion (i) appliquée à l'opérateur $T^{1/2}$. ∎

3. QUELQUES PROPRIÉTÉS EXTRÉMALES DES VALEURS SINGULIÈRES D'UN OPÉRATEUR COMPACT

3.1. Quelques propriétés extrémales des valeurs propres d'un opérateur compact auto-adjoint. Des propositions 2.5 et 2.6 découlent les deux résultats suivants, le premier apparaissant comme une extension d'un résultat dû à Göhberg et Krejn [7]:

THÉORÈME 3.1. *Soient T un élément auto-adjoint de $\sigma_\infty(H)$ et $\{u_1, \dots, u_q\}$ un système orthonormal de H. Alors:*

(i) *Si $\{|\lambda_i|\}_{i\in I}$ est la suite pleine décroissante des valeurs absolues des valeurs propres de T et $\{e_i\}_{i\in I}$ une base orthonormale de vecteurs propres de T associés, on a*

$$\sum_{i=1}^{q} |(Tu_i \mid u_i)|^p \leqslant \sum_{i=1}^{q} |\lambda_i|^p.$$

(ii) *Si $p > 1$, pour que cette relation soit une égalité, il faut et il suffit que, pour tout i de $\{1, \dots, q\}$, $u_i = e_i$.*

(iii) *Si $p = 1$ et si T est positif, pour que cette relation soit une égalité, il faut et il suffit que $u_1, \dots, u_q$ appartiennent à un sous-espace engendré par q premiers vecteurs propres de T.*

(iv) *Lorsque $p = 1$ et que T n'est pas positif, il y a égalité si et seulement si $\{u_1, \dots, u_q\}$ est la réunion d'une base du sous-espace engendré par la famille $\{e_i\colon 1 \leqslant i \leqslant q,\ \lambda_i > 0\}$ et d'une base du sous-espace engendré par la famille $\{e_i\colon 1 \leqslant i \leqslant q,\ \lambda_i > 0\}$.*

Démonstration. (i) En effet, si P désigne le projecteur orthogonal de H sur le sous-espace F engendré par $\{u_1, \dots, u_q)$, la proposition 1.1 appliquée à l'opérateur $T \circ P$ donne

$$\sum_{i=1}^{q} |(Tu_i \mid u_i)|^p = \sum_{i=1}^{q} |(T \circ Pu_i \mid u_i)|^p \leqslant \|T \circ P\|_p^p = \|T_F\|_p^p, \tag{5}$$

où, en vertu du théorème 2.3:

$$\|T_F\|_p^p \leqslant \|T_q\|_p^p = \sum_{i=1}^{q} |\lambda_i|^p. \tag{6}$$

(ii) La relation (5) est une égalité si et seulement si $P = P_q$ (cf. théorème 2.3). D'autre part, si $p > 1$, pour que (5) soit une égalité, il faut et il suffit que $u_i = e_i$ pour chaque i de $\{1, \dots, q\}$ (cf. proposition 1.1), d'où la propriété.

(iii) Si $p = 1$ et si T est positif, alors on sait que

$$\sum_{i=1}^{q} (Tu_i \mid u_i) = \sum_{i=1}^{q} (P \circ T \circ Pu_i \mid u_i) \leqslant \|P \circ T\|_1 = \|T_F\|_1 \leqslant \sum_{i=1}^{q} \lambda_i = \|T_q\|_1,$$

et le résultat découle du théorème 2.2.

(iv) Si T n'est pas positif, on a $T_q = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i e_i \otimes e_i$, et pour $\{u_1, \dots, u_q\}$, base du sous-espace F engendré par $\{e_1, \dots, e_q\}$, la relation (6) étant une égalité, il suit

$$\sum_{i=1}^{q} |(Tu_i \mid u_i)| = \sum_{i=1}^{q} |(T_q u_i \mid u_i)| = \sum_{i=1}^{q} \Big| \sum_{j=1}^{q} \lambda_j |(e_j \mid u_i)|^2 \Big|$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{q} |\lambda_j| \, \|e_j\|^2 = \sum_{j=1}^{q} |\lambda_j|.$$

Pour qu'il y ait égalité, il faut et il suffit que chaque u_i soit orthogonal, ou à tous les e_j associés aux valeurs propres λ_j négatives, ou encore à tous les e_j associés aux valeurs propres λ_j positives. Si F_- [resp. F_+] est la somme directe des sous-espaces propres de T associés aux valeurs propres négatives [resp. positives], on a $F = F_- \oplus F_+$, ce qui revient à dire que $\{u_1, \ldots, u_q\}$ est la réunion d'une base de F_- et d'une base de F_+. ∎

De cette proposition découle le

COROLLAIRE 3.2. *Soient $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ la suite pleine décroissante des valeurs propres strictement positives d'un élément auto-adjoint positif T de $\sigma_\infty(H)$ et $\{u_1, \ldots, u_q\}$ un système orthonormal de H ($q \leqslant \operatorname{card} I$). Alors, pour toute application convexe f de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$, on a*

$$\sum_{i=1}^{q} f[(Tu_i \mid u_i)] \leqslant \sum_{i=1}^{q} f(\lambda_i).$$

Si de plus f est strictement convexe, pour que cette relation soit une égalité, il faut et il suffit que $u_1, \ldots, u_q$ soient q premiers vecteurs propres de T.

En effet, quitte à procéder à une re-indexation, on peut supposer que $\{(Tu_i \mid u_i)\}_{i=1,\ldots,q}$ est une suite décroissante. L'application de la proposition 1.2 donne alors l'inégalité cherchée, compte tenu de l'assertion (i) du théorème précédent (avec $p = 1$). La deuxième partie de ce corollaire est encore une conséquence de la proposition 1.2, étant donné que l'on a $(Tu_i \mid u_i) = \lambda_i$ pour tout i de $\{1, \ldots, q\}$ si et seulement si u_i est vecteur propre normé de T associé à la valeur propre λ_i. ∎

Remarques. 1. Si T n'est pas positif, on relèvera que l'on obtient un résultat analogue en considérant $|(Tu_i \mid u_i)|$ et $|\lambda_i|$.

2. L'assertion (iii) du théorème 3.1 est une autre manière d'exprimer une propriété due à Wielandt (cf. [12]).

3.2. Quelques propriétés extrémales des valeurs singulières d'un opérateur compact non auto-adjoint. Des deux résultats précédents, nous déduisons la

PROPOSITION 3.3. *Soient T un élément de $\sigma_\infty(H, H')$, $\{s_i\}_{i \in I}$ la suite pleine décroissante des valeurs singulières non-nulles de T et $\{u_1, \ldots, u_q\}$ un système orthonormal de H ($q \leqslant \operatorname{card} I$). Alors, pour tout réel $\alpha \geqslant 1$, on a*

$$\sum_{i=1}^{q} \|Tu_i\|^{2\alpha} \leqslant \sum_{i=1}^{q} s_i^{2\alpha}.$$

Pour que cette relation soit une égalité, il faut et il suffit que $\{u_1, \ldots, u_q\}$ soit

— lorsque $\alpha > 1$, un système orthonormal de q premiers vecteurs propres de $T^* \circ T$;

— lorsque $\alpha = 1$, une base orthonormale d'un sous-espace de H engendré par q premiers vecteurs propres de $T^* \circ T$.

En effet, lorsque $\alpha > 1$, $\mathbf{1}_{\boldsymbol{R}^+}$ désignant la fonction caractéristique de $\boldsymbol{R}^+$, il suffit d'appliquer le corollaire 3.2 à la fonction $f\colon x \to x^\alpha \mathbf{1}_{\boldsymbol{R}^+}(x)$ et à l'opérateur $T^* \circ T$, après avoir remarqué que

$$\sum_{i=1}^{q} (T^* \circ Tu_i \,|\, u_i)^\alpha = \sum_{i=1}^{q} (Tu_i \,|\, Tu_i)^\alpha = \sum_{i=1}^{q} \|Tu_i\|^{2\alpha}.$$

Lorsque $\alpha = 1$, il suffit d'appliquer l'assertion (ii) du théorème 3.1 à l'opérateur $T^* \circ T$. ∎

La proposition suivante constitue une extension du théorème 3.1:

Proposition 3.4. *Soient T un élément de $\sigma_\infty(H, H')$, $\{s_i\}_{i\in I}$ la suite pleine décroissante des valeurs singulières non-nulles de T, $\{u_1, \ldots, u_q\}$ et $\{v_1, \ldots, v_q\}$ deux systèmes orthonormaux de H et H' respectivement ($q \leqslant \operatorname{card} I$). Alors:*

(a) *On a*

$$\sum_{i=1}^{q} |(Tu_i \,|\, v_i)| \leqslant \sum_{i=1}^{q} s_i,$$

et pour que cette relation soit une égalité, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient réalisées:

(i) *$\{u_1, \ldots, u_q\}$ [resp. $\{v_1, \ldots, v_q\}$] est une base orthonormale d'un sous-espace engendré par q premiers vecteurs propres $e_1, \ldots, e_q$ [resp. $f_1, \ldots, f_q$] de $T^* \circ T$ [resp. $T \circ T^*$];*

(ii) *il existe un nombre complexe ε de module 1 tel que*

$$(\forall (i, j) \in \{1, \ldots, q\}^2)\ (f_j \,|\, v_i) = \varepsilon (e_j \,|\, u_i).$$

(b) *Pour chaque application convexe g de $\boldsymbol{R}^+$ dans $\boldsymbol{R}$, on a*

$$\sum_{i=1}^{q} g\big[|(Tu_i \,|\, v_i)|\big] \leqslant \sum_{i=1}^{q} g(s_i),$$

et, si g est strictement convexe, cette relation devient une égalité si et seulement si $u_1, \ldots, u_q$ [resp. $v_1, \ldots, v_q$] sont q premiers vecteurs propres de $T^* \circ T$ [resp. $T \circ T^*$].

Démonstration. (a) Soient F et F' les sous-espaces engendrés respectivement par $\{u_1, \ldots, u_q\}$ et $\{v_1, \ldots, v_q\}$, P et P' les projecteurs orthogonaux de H sur F et de H' sur F'. Alors, d'après la définition de la norme $\|\cdot\|_1$ (cf. § 1.3 et [7]) et la proposition 2.5, on a

$$\sum_{i=1}^{q} |(Tu_i \,|\, v_i)| = \sum_{i=1}^{q} |(P' \circ T \circ Pu_i \,|\, v_i)| \leqslant \|P' \circ T \circ P\|_1 \leqslant \sum_{i=1}^{q} s_i.$$

Toujours en vertu de la proposition 2.5, la dernière inégalité devient une égalité si et seulement si $P = P_q$ et $P' = P'_q$. Sous cette condition, il suit donc

$$\sum_{i=1}^{q} |(Tu_i \,|\, v_i)| = \sum_{i=1}^{q} |(T_q u_i \,|\, v_i)| = \sum_{i=1}^{q} \Big|\sum_{j=1}^{q} s_j (e_j \,|\, u_i)(f_j \,|\, v_i)\Big|$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{q} s_j \sum_{i=1}^{q} |(e_j \,|\, u_i)|\, |(f_j \,|\, v_i)|.$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on a

$$\sum_{i=1}^{q} |(e_j \mid u_i)|\,|(f_j \mid v_i)| \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{q} |(e_j \mid u_i)|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{i=1}^{q} |(f_j \mid v_i)|^2\Big)^{1/2} = 1,$$

avec égalité si et seulement si

$$\exists k_j \in \boldsymbol{R}^+ : (\forall i \in \{1, \ldots, q\}) \ |(f_j \mid v_i)| = k_j |(e_j \mid u_i)|.$$

Alors, pour chaque j de $\{1, \ldots, q\}$, il vient

$$\sum_{i=1}^{q} |(f_j \mid v_i)|^2 = \|f_j\|^2 = 1 = k_j^2 \sum_{i=1}^{q} |(e_j \mid u_i)|^2 = k_j^2 \|e_j\|^2 = k_j^2,$$

d'où l'on tire $k_j = 1$. On peut donc écrire

$$\Big|\sum_{i=1}^{q} s_j (e_j \mid u_i)(f_j \mid v_i)\Big| = \Big|\sum_{i=1}^{q} s_j \varepsilon_j |(e_j \mid u_i)|^2\Big|,$$

où les ε_j sont des complexes de module 1.

Il en découle que maximiser $\sum_{i=1}^{q} |(Tu_i \mid v_i)|$ revient à maximiser

$$\Big|\sum_{i=1}^{q} s_j \varepsilon_j |(e_j \mid u_i)|^2\Big|;$$

or, cette dernière expression n'est maximum que si tous les ε_j sont égaux à un même complexe ε (de module 1). Il en résulte que $\sum_{i=1}^{q} |(Tu_i \mid v_i)|$ est maximum (et égal à $\sum_{i=1}^{q} s_i$) si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées:

(i) $P = P_q$ et $P' = P'_q$;

(ii) il existe un complexe ε de module 1 tel que

$$(\forall (i, j) \in \{1, \ldots, q\}^2) \ (f_j \mid v_i) = \varepsilon (e_j \mid u_i).$$

(b) Quitte à procéder à une re-indexation, on peut supposer que la suite $\{|Tu_i \mid v_i|\}_{i=1,\ldots,q}$ est décroissante. La proposition 1.2 appliquée à l'inégalité (a) conduit alors aussitôt à l'inégalité (b), et, si g est strictement convexe sur $\boldsymbol{R}^+$, une telle inégalité devient une égalité si et seulement si

$$(\forall i \in \{1, \ldots, q\}) \ |(Tu_i \mid v_i)| = s_i.$$

Or, l'inégalité de Cauchy–Schwarz donne, pour tout i de $\{1, \ldots, q\}$:

$$|(Tu_i \mid v_i)|^2 \leqslant \|Tu_i\|^2 = (T^* \circ Tu_i \mid u_i) \leqslant s_i^2$$

et

$$|(Tu_i \mid v_i)|^2 \leqslant \|T^* v_i\|^2 = (T \circ T^* v_i \mid v_i) \leqslant s_i^2.$$

Il en résulte que, pour que $|(Tu_i \mid v_i)| = s_i$, il faut et il suffit que

$$(T^* \circ Tu_i \mid u_i) = (T \circ T^* v_i \mid v_i) = s_i^2,$$

et la relation (b) est donc une égalité si et seulement si $u_1, \ldots, u_q$ [resp. $v_1, \ldots, v_q$] sont q premiers vecteurs propres orthonormés de $T^* \circ T$ [resp. $T \circ T^*$]. ■

Enfin, désignant par det $(T^* \circ Tu_i \mid u_j)_{i,j=1,\ldots,q}$ le déterminant de la matrice à q lignes et q colonnes

$$\left((T^* \circ Tu_i \mid u_j)_{i,j=1,\ldots,q}\right),$$

nous avons la

PROPOSITION 3.5. *Si T est un élément de $\sigma_\infty(H, H')$ de rang supérieur ou égal à q donné, $\{s_i\}_{i\in I}$ la suite pleine décroissante des valeurs singulières non-nulles de T et $\mathscr{S}_q$ la famille des systèmes orthonormaux de q vecteurs de H, on a*

$$\max\{\det(T^* \circ Tu_i \mid u_j)_{i,j=1,\ldots,q} \colon \{u_j\}_{j=1,\ldots,q} \in \mathscr{S}_q\} = \prod_{i=1}^{q} s_i^2.$$

Pour que ce maximum soit atteint, il faut et il suffit que $\{u_j\}_{j=1,\ldots,q}$ soit une base orthonormale d'un sous-espace F de H engendré par q premiers vecteurs propres de $T^* \circ T$.

En effet, on sait que (cf. [4], [7]):

$$\max\{\det(T^* \circ Tu_i \mid u_j)_{i,j=1,\ldots,q} \colon \{u_j\}_{j=1,\ldots,q} \in \mathscr{S}_q\} \leqslant \prod_{i=1}^{q} s_i^2.$$

Si F est le sous-espace engendré par $\{u_j\}_{j=1,\ldots,q}$, P le projecteur orthogonal de H sur F et $\{\mu_j\}_{j=1,\ldots,q}$ la suite pleine décroissante des q premières valeurs propres non-nulles de $P \circ T^* \circ T \circ P$, il vient

$$\det(T^* \circ Tu_i \mid u_j)_{i,j=1,\ldots,q} \leqslant \det(P \circ T^* \circ T \circ Pu_i \mid u_j)_{i,j=1,\ldots,q} = \prod_{i=1}^{q} \mu_i.$$

Or, les assertions (i) et (ii) du théorème 2.2 indiquent successivement que

$$(\forall i \in \{1, \ldots, q\}) \;\; 0 < \mu_i \leqslant s_i^2$$

(ce qui redonne immédiatement le résultat rappelé ci-dessus) et que $\mu_i = s_i^2$ pour tout i de $\{1, \ldots, q\}$ si et seulement si F est engendré par q premiers vecteurs propres de $T^* \circ T$, ce qui permet de conclure. ■

Remarque. On notera que, si T est un élément auto-adjoint de $\sigma_\infty(H)$, ce corollaire peut s'appliquer à l'opérateur $T^{1/2}$. Le maximum cherché est alors atteint si et seulement si $\{u_j\}_{j=1,\ldots,q}$ est une base orthonormale d'un sous-espace engendré par q premiers vecteurs propres de T.

3.3. Propriétés spécifiques de la dimension finie. Considérons un opérateur compact T de H dans H'. Le théorème 3.1 appliqué à l'opérateur $T^* \circ T$ indique que, pour tout élément $\{u_1, \ldots, u_q\}$ de l'ensemble $\mathscr{S}_q$ des systèmes de q vecteurs orthonormaux de H ($q \leqslant \operatorname{card} J$), on a

$$(\forall k \leqslant q) \;\; \sum_{i=1}^{k} (T^* \circ Tu_i \mid u_i) \leqslant \sum_{i=1}^{k} s_i^2.$$

Par suite, si f est une fonction de $\boldsymbol{R}^q$ dans $\boldsymbol{R}$ vérifiant les hypothèses de la proposition 1.3, on a, après re-indexation éventuelle de la suite $\{(T^* \circ Tu_i \mid u_i) \colon i = 1, \ldots, q\}$ de manière à ce qu'elle soit décroissante

$$f\,[(T^* \circ Tu_1 \mid u_1), \ldots, (T^* \circ Tu_q \mid u_q)] \leqslant f(s_1^2, \ldots, s_q^2).$$

Pour que cette relation soit une égalité, il faut et il suffit que, pour tout i de $\{1, \ldots, q\}$, on ait $(T^* \circ Tu_i \mid u_i) = s_i^2$, ce qui équivaut à dire que $\{u_1, \ldots, u_q\}$ est une famille orthonormée de q premiers vecteurs propres de $T^* \circ T$.

Relevons d'autre part que, conformément à la remarque qui suit la proposition 1.3, on peut remplacer l'hypothèse $\partial f/\partial x_q > 0$ par l'hypothèse

$$(\forall \{u_1, \ldots, u_q\} \in \mathscr{S}_q) \sum_{i=1}^{q} (T^* \circ Tu_i \mid u_i) = \sum_{i=1}^{q} s_i^2.$$

Si H est de dimension finie k et si l'on prend $q = k$, cette condition est vérifiée (par définition même de $\|T^* \circ T\|_1$); de plus, si T est de rang k, alors les réels $(T^* \circ Tu_i \mid u_i)$ et s_i sont positifs pour chaque i.

Nous énoncerons ainsi la

Proposition 3.6. *Soient T un opérateur injectif de H, espace de Hilbert de dimension finie $k\,(k \geqslant 1)$, dans H', et f une application de $\boldsymbol{R}^k$ dans $\boldsymbol{R}$ admettant des dérivées partielles continues vérifiant la condition*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} > \frac{\partial f}{\partial x_2} > \ldots > \frac{\partial f}{\partial x_k} > 0$$

sur l'ouvert

$$D = \{(x_1, \ldots, x_k) \in \boldsymbol{R}^k \colon x_1 > \ldots > x_k > 0\}.$$

Alors, on a

$$\max\{f\,[(T^* \circ Tu_1 \mid u_1), \ldots, (T^* \circ Tu_k \mid u_k)] \colon \{u_1, \ldots, u_k\} \in \mathscr{S}_k\} = f(s_1^2, \ldots, s_k^2),$$

et pour que ce maximum soit atteint, il faut et il suffit que $\{u_1, \ldots, u_k\}$ soit une base orthonormale de H formée de vecteurs propres de $T^* \circ T$.

Etant donnés deux entiers naturels n et k vérifiant $1 \leqslant n \leqslant k$, considérons maintenant la fonction symétrique élémentaire S_n qui à tout $(x_1, \ldots, x_k)$ de $\boldsymbol{R}^k$ associe le réel

$$S_n(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_n \leqslant k} x_{i_1} \ldots x_{i_n}.$$

Du théorème précédent, on déduit alors le

Corollaire 3.7. *Soient T un opérateur auto-adjoint positif injectif défini sur un espace de Hilbert de dimension finie $k \geqslant 2$, et $\{\lambda_i\}_{i=1,\ldots,k}$ la suite pleine décroissante des valeurs propres de T. Alors, pour tout $\{u_i\}_{i=1,\ldots,k}$ de $\mathscr{S}_k$ et tout entier n de $\{2, \ldots, k\}$, on a*

$$S_n[(Tu_1 \mid u_1), \ldots, (Tu_k \mid u_k)] \geqslant S_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_k).$$

Pour que cette relation soit une égalité, il faut et il suffit que $\{u_i\}_{i=1,\ldots,k}$ soit une base orthonormale de H formée de vecteurs propres de T.

Démonstration. L'application $f = -S_n$ vérifie les hypothèses de la proposition 3.6 qui, appliquée à l'opérateur $T^{1/2}$ donne aussitôt le résultat.

En effet, on a

$$S_n(x_1, \ldots, x_k) = x_i S_{n-1}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k) \\ + S_n(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k),$$

d'où l'on tire que

$$\partial f/\partial x_i = -S_{n-1}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k),$$

et, si $x_i > x_{i+1}$, que

$$\partial f/\partial x_{i+1} = -S_{n-1}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+2}, \ldots, x_k) \\ < -S_{n-1}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k) = \partial f/\partial x_i.$$

Remarque. Lorsque $n = k$, on obtient en particulier:

$$\min\{\prod_{i=1}^{k} (Tu_i \mid u_i): \{u_i\}_{i=1,\ldots,k} \in \mathscr{S}_k\} = \prod_{i=1}^{k} \lambda_i,$$

ce minimum étant atteint *uniquement* si $\{u_i\}_{i=1,\ldots,k}$ est une base orthonormale de H formée de vecteurs propres de T.

Par application de la proposition 3.6 à l'opérateur $T^{1/2}$ et à la fonction f de $\boldsymbol{R}^k$ dans $\boldsymbol{R}$ qui à tout $(x_1, \ldots, x_k)$ associe $\sum_{i,j} |x_i - x_j|^\alpha$, on obtient le

COROLLAIRE 3.8. *Sous les hypothèses du corollaire* 3.7 *et pour tout réel* $\alpha \geqslant 1$, *on a*

$$\max\{\sum_{i,j} |(Tu_i \mid u_i) - (Tu_j \mid u_j)|^\alpha: \{u_i\}_{i=1,\ldots,k} \in \mathscr{S}_k\} = \sum_{i,j} |\lambda_i - \lambda_j|^\alpha,$$

le maximum étant atteint uniquement lorsque $\{u_i\}_{i=1,\ldots,k}$ *est une base orthonormale de* H *formée de vecteurs propres de* T.

Remarque. Lorsque $\alpha = 2$, ce résultat peut se déduire directement du corollaire 3.7, puisque l'on a

$$2 \sum_{i \neq j} x_i x_j + \sum_{i,j} (x_i - x_j)^2 = 2k \sum_{i=1}^{k} x_i^2.$$

TRAVAUX CITÉS

[1] N. I. Akhiezer and I. M. Glazman, *Theory of Linear Operators in Hilbert Space*, Frederik Ungar Publishing Co., New York 1961.

[2] J. N. Darroch, *An extremal property of principal components*, Ann. Math. Statist. 36 (1965), pp. 1579–1582.

[3] J. Dauxois et A. Pousse, *Les analyses factorielles en calcul des probabilités et en statistique: Essai d'étude synthétique*, Thèse d'Etat, Université Paul-Sabatier, Toulouse 1976.

[4] J. Dieudonné, *Fondements de l'analyse moderne*, Tome 1, Gauthier-Villars, Paris 1968.

[5] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators*, Vol. 1, 2ème ed., Interscience Publishers, New York 1964.

[6] I. M. Gelfand et N. Y. Vilenkin, *Les distributions*, Tome 4, Dunod, Paris 1964.
[7] I. C. Göhberg and M. G. Krejn, *Introduction to the Theory of Linear Non-selfadjoint Operators*, Nauka, Moscow 1965. English translation: Transl. Math. Monographs, Vol. 18, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1969. M.R. 36#3157.
[8] C. W. Groetsch, *Generalized inverses of operators — Representation and approximation*, Pure Appl. Math., M. Dekker, Inc., New York and Bâle 1977.
[9] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Polya, *Inequalities*, University Press, Cambridge 1964.
[10] C. R. Rao, *The use and interpretation of principal component analysis in applied research*, Sankyā Ser. A 26 (1964), pp. 329–358.
[11] — *Separation theorems for singular values of matrices and their applications in multivariate analysis*, J. Multivariate Anal. (1979), pp. 362–379.
[12] H. Wielandt, *An extremum property of sums of eigenvalues*, Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1955), pp. 106–110.

Département de Mathématiques–Recherche
I.P.R.A. — Université de Pau et des Pays de l'Adour
Avenue de l'Université — 64000 Pau, France

Received on 7.1.1997