PROBABILITY
AND
MATHEMATICAL STATISTICS
Vol. 17, Fasc. 2 (1997), pp. 311–319

SUR LA DÉRIVÉE FRACTIONNAIRE DU TEMPS LOCAL BROWNIEN

PAR

B. BOUFOUSSI (MARRAKECH), M. EDDAHBI (MARRAKECH) ET A. KAMONT (SOPOT)

Abstract. In this paper, regularity of the fractional derivative (with respect to the space variable) of the brownian local time is studied. As a consequence, some results on the regularity of other additive functionals of brownian motion are obtained.

1. INTRODUCTION

Soit $(B_t,\, t \geqslant 0)$ un mouvement brownien linéaire et $\big(L(t,\, x),\, t \geqslant 0,\, x \in R\big)$ une version p.s. continue (en t et x) de son temps local, i.e. la densité de la mesure aléatoire $\mu_t(A) = \int_0^t \chi_A(B_s)\, ds$ par rapport à la mesure de Lebesgue (où $A \subset R$ est un borelien de R et $\chi_A(\cdot)$ est la fonction indicatrice de A). Il est bien connu d'après [14] et [12] que pour tout $T > 0$ le temps local vérifie p.s. la condition de Hölder d'indice v, $v < \frac{1}{2}$, sur $[0,\, T] \times R$. Par ailleurs il a été montré dans [4] et [6] que pour tout $t > 0$ a fonction aléatoire $L(t,\, \cdot)$ vérifie p.s. la condition de Hölder d'indice $\frac{1}{2}$ en norme L^p, $p < \infty$, et en une certaine norme de Orlicz. Vu les inclusions

$$\mathrm{Lip}(p,\, \alpha) \hookrightarrow \mathrm{Lip}(\infty,\, \alpha - 1/p) \qquad \text{pour } 1/p < \alpha$$

($\mathrm{Lip}(p,\, \alpha)$ étant l'espace des fonctions vérifiant la condition de Hölder d'exposant α en norme L^p; voir aussi la section 2), les conditions données dans [4] et [6] sont plus précises que la condition de Hölder d'indice v, $v < \frac{1}{2}$, en norme uniforme.

Le présent travail est motivé par la question soulevée dans la remarque 3 de [4] sur l'appartenance d'autres fonctionnelles additives du mouvement brownien aux espaces $\mathrm{Lip}(p,\, \alpha)$. Le temps local brownien étant une fonctionnelle additive particulière du mouvement brownien, elle appartient à la classe des fonctionnelles additives continues, associée au brownien, d'énergie nulle au sens de Fukushima [9]. Cette classe contient des exemples importants, notamment la dérivée fractionnaire et la transformée de Hilbert du temps local. Elles ont été étudiées par plusieurs auteurs dans divers points de vu. L'existence de la valeur principale de Cauchy du temps local brownien a été remarquée par Itô et Mackean [10]. Ensuite Yor [18], Yamada, [15], Nakao [11] et Bertoin [1] ont developpés l'étude de ces fonctionnelles, ce qui a permis par exemple d'obtenir une généralisation de la formule de Itô (voir [18] et [2]) et d'établir des théorèmes limites pour les temps d'occupations du mouvement brownien (voir [17]). Les dérivées fractionnaires du temps local ont été étudiées par Ezawa et al. dans [8] pour des objectifs de la physique et elles apparaissent naturellement dans certains théorèmes limites (theorems 2.1 et 2.2 dans [17]). Elles apparaissent aussi de façon naturelle dans le calcul stochastique (voir Fukushima [9]), ainsi que dans la théorie spectrale des cordes vibrantes (voir Bertoin [1]). Dans ce travail nous nous sommes interéssés à la régularité des dérivées fractionnaires du temps local; comme conséquence, nous obtenons des régularités pour les fonctionnelles associées à la partie finie d'Hadamard $H^x(-1-\alpha, t)$ $(0 < \alpha < \frac{1}{2})$ (voir section 4) et à la valeur principale de Cauchy C_t^x (voir la remarque 4.3). Déjà traitées par exemple dans [15]–[18], [3] et [2], ces fonctionnelles peuvent être obtenues moyennant la transformée de Hilbert et $D^\alpha L(t, \cdot)$ — la dérivée fractionnaire d'ordre α par rapport à la variable x du temps local brownien.

D'après l'article de Yamada [16], on sait que le processus $D^\alpha L(t, x)$ vérifie les conditions de Hölder suivantes:

Soit $T > 0$; alors p.s. pour tout $0 < \beta < \frac{1}{2}-\alpha$ il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $0 \leqslant t, s \leqslant T$ et $x \in R$

$$|D^\alpha L(t, x) - D^\alpha L(s, x)| \leqslant C|t-s|^\beta, \tag{1.1}$$

et pour tout $0 \leqslant t \leqslant T$, $x, y \in R$

$$|D^\alpha L(t, x) - D^\alpha L(t, y)| \leqslant C|x-y|^\beta. \tag{1.2}$$

Cette régularité de $D^\alpha L(t, x)$ entraîne le résultat sur la régularité de $H^x(-1-\alpha, t)$:

Soit $T, M > 0$; alors p.s. pour tout $0 < \beta < \frac{1}{2}-\alpha$ il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $0 \leqslant t, s \leqslant T$, $|x| \leqslant M$

$$|H^x(-1-\alpha, t) - H^x(-1-\alpha, s)| \leqslant C|t-s|^\beta,$$

et pour tout $0 \leqslant t \leqslant T$, $|x|, |y| \leqslant M$

$$|H^x(-1-\alpha, t) - H^y(-1-\alpha, t)| \leqslant C|x-y|^\beta.$$

Dans cet article nous montrons les résultats suivants:

1. Pour tout $t > 0$ et $p < \infty$ la fonction aléatoire $D^\alpha L(t, \cdot)$ vérifie p.s. la condition de Hölder d'exposant $\frac{1}{2}-\alpha$ en norme $L^p(R)$ (théorème 3.2).

2. Pour tout $T > 0$ et $0 < \beta < (1-\alpha)/2$ la trajectoire $t \to D^\alpha L(t, x)$ vérifie p.s. la condition de Hölder d'indice β sur $[0, T]$, uniformément en $x \in R$ (théorème 3.3).

Nous en déduisons des résultats similaires sur la régularité du processus $H^x(-1-\alpha, t)$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ (propositions 4.1 et 4.2).

La démonstration du premier point est basée sur les mêmes techniques que celles utilisées dans [17]. Par ailleurs, pour montrer le deuxième point, nous utilisons une condition de Hölder mixte du temps local, donnée dans [5].

2. DÉRIVÉES FRACTIONNAIRES, ESPACES FONCTIONNELLES ET RÉGULARITÉ DU TEMPS LOCAL

Dérivées fractionnaires

DÉFINITION 2.1. Soit $0 < \alpha < 1$ et $f\colon R \to R$ une fonction bornée, localement hölderienne d'indice λ, $\lambda > \alpha$. Alors la *dérivée fractionnaire (de Marchaud) d'ordre α de f* est définie par

$$D^\alpha f(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{f(x)-f(x-t)}{t^{1+\alpha}} dt. \tag{2.1}$$

Pour les propriétés des dérivées fractionnaires, voir par exemple [13].

Espaces fonctionnelles. Nous considérons les espaces de fonctions vérifiant une condition de Hölder en norme $L^p(R)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Soit $f \in L^p(R)$, $1 \leqslant p < \infty$, le module de continuité de f en norme L^p (d'ordre 1) est défini par

$$\omega_p(f, \delta) = \sup_{|h| \leqslant \delta} \Big(\int_R |f(x)-f(x+h)|^p \, dx\Big)^{1/p}, \qquad \delta > 0.$$

Soit $0 < \alpha < 1$; alors *l'espace des fonctions vérifiant la condition de Hölder d'exposant α en norme $L^p(R)$* est défini par

$$\mathrm{Lip}(p, \alpha) = \left\{ f \in L^p(R)\colon \sup_{\delta > 0} \frac{\omega_p(f, \delta)}{\delta^\alpha} < +\infty \right\}.$$

Pour $p = \infty$ et $f \in C(R) \cap L^\infty(R)$, on définit

$$\omega_\infty(f, \delta) = \sup_{|h| \leqslant \delta} \sup_{x \in R} |f(x)-f(x+h)|$$

et

$$\mathrm{Lip}(\infty, \alpha) = \left\{ f \in C(R) \cap L^\infty(R)\colon \sup_{\delta > 0} \frac{\omega_\infty(f, \delta)}{\delta^\alpha} < +\infty \right\}.$$

Régularité du temps local. D'après [14] et [12], on sait que le temps local brownien vérifie p.s. les conditions de Hölder suivantes: pour tout $T > 0$ et

$0 < \alpha < \frac{1}{2}$ il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $0 < t, s \leqslant T$, $x \in R$

$$|L(t, x) - L(s, x)| \leqslant C|t-s|^{\alpha} \tag{2.2}$$

et pour tout $0 \leqslant t \leqslant T$, $x, y \in R$

$$|L(t, x) - L(t, y)| \leqslant C|x-y|^{\alpha}. \tag{2.3}$$

Nous utiliserons aussi des résultats suivants:

THÉORÈME 2.2. *Soit $t > 0$. Alors p.s. $L(t, \cdot) \in \mathrm{Lip}(p, \frac{1}{2})$ pour tout $p < \infty$.*

THÉORÈME 2.3. *Soit $T > 0$. Alors p.s. pour tout $0 < \alpha < \frac{1}{4}$ et $0 < \beta < \frac{1}{2}$ il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $(t, x), (s, y) \in [0, T] \times R$*

$$|L(t, x) - L(t, y) - L(s, x) + L(s, y)| \leqslant C|t-s|^{\alpha}|x-y|^{\beta}.$$

La démonstration du théorème 2.2 se trouve dans [6] et celle du théorème 2.3 dans [5].

3. RÉGULARITÉ DE LA DÉRIVÉE FRACTIONNAIRE DU TEMPS LOCAL

Soit $0 < \alpha < \beta < 1$ et f une fonction à support compact. Si $f \in \mathrm{Lip}(\infty, \beta)$, alors $D^{\alpha} f \in \mathrm{Lip}(\infty, \beta - \alpha)$ (voir par exemple [13]). Nous avons besoin d'une version de ce résultat pour $f \in \mathrm{Lip}(p, \beta)$ pour $p < \infty$.

LEMME 3.1. *Soit $0 < \alpha < \beta < 1$ et $f\colon R \to R$ une fonction à support compact telle que $f \in \mathrm{Lip}(p, \beta)$ pour tout $1 \leqslant p < \infty$. Alors $D^{\alpha} f \in \mathrm{Lip}(p, \beta - \alpha)$.*

Démonstration. Comme $f \in \mathrm{Lip}(p, \beta)$, alors $f \in \mathrm{Lip}(\infty, \beta - 1/p)$; puisque $f \in \mathrm{Lip}(p, \beta)$ pour tout $1 \leqslant p < \infty$, alors $f \in \mathrm{Lip}(\infty, \gamma)$ pour tout $0 < \gamma < \beta$ et $D^{\alpha} f$ est donc bien définie; de plus, f étant à support compact

$$|D^{\alpha} f(x)| = O\left(\frac{1}{x^{1+\alpha}}\right) \quad \text{pour } x \to \infty \qquad \text{et} \qquad \exists_{x_0 \in R}\, \forall_{x \leqslant x_0}\, D^{\alpha} f(x) = 0.$$

Comme $D^{\alpha} f \in \mathrm{Lip}(\infty, \gamma)$ pour tout $0 < \gamma < \beta - \alpha$, donc $D^{\alpha} f \in L^p(R)$ pour tout $1 \leqslant p < \infty$. Pour la démonstration du lemme 3.1, il faut montrer que pour tout $p < \infty$

$$\omega_p(D^{\alpha} f, \delta) = O(\delta^{\beta - \alpha}) \qquad \text{pour } \delta \to 0.$$

Soit $1 \leqslant p < \infty$ et $h > 0$. D'après la définition de la dérivée fractionnaire on a

$$\begin{aligned} &|D^{\alpha} f(x+h) - D^{\alpha} f(x)| \\ &\quad = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \left| \left(\int_0^{\infty} \frac{f(x+h) - f(x+h-t)}{t^{1+\alpha}}\, dt - \int_0^{\infty} \frac{f(x) - f(x-t)}{t^{1+\alpha}}\, dt \right) \right| \\ &\quad \leqslant \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{|f(x+h) - f(x+h-t) - f(x) + f(x-t)|}{t^{1+\alpha}}\, dt, \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\|D^\alpha f(x+h)-D^\alpha f(x)\|_p$$

$$\leqslant \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left\|\int_0^\infty \frac{|f(x+h)-f(x+h-t)-f(x)+f(x-t)|}{t^{1+\alpha}}dt\right\|_p$$

$$\leqslant \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty \frac{\|f(x+h)-f(x+h-t)-f(x)+f(x-t)\|_p}{t^{1+\alpha}}dt$$

$$\leqslant \frac{2\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int_0^h \frac{\|f(x)-f(x-t)\|_p}{t^{1+\alpha}}dt+\int_h^\infty \frac{\|f(x)-f(x+h)\|_p}{t^{1+\alpha}}dt\right)$$

$$\leqslant C_1\left(\int_0^h \frac{t^\beta}{t^{1+\alpha}}dt+h^\beta\int_h^\infty \frac{1}{t^{1+\alpha}}dt\right)\leqslant C_2 h^{\beta-\alpha},$$

et la preuve du lemme 3.1 est achevée. ∎

Puisque pour tout $t>0$, $L(t,\cdot)$ est p.s. une fonction à support compact, on obtient grâce au théorème 2.2 et le lemme 3.1 le résultat suivant:

THÉORÈME 3.2. *Soit $t>0$ et $0<\alpha<\frac{1}{2}$. Alors p.s. pour tout $p<\infty$*

$$D^\alpha L(t,\cdot)\in \mathrm{Lip}(p,\tfrac{1}{2}-\alpha).$$

Maintenant, nous allons donner un résultat sur la régularité de $D^\alpha L(t,x)$ en t.

THÉORÈME 3.3. *Soit $T>0$ et $0<\alpha<\frac{1}{2}$. Alors p.s. pour tout $0<\lambda<(1-\alpha)/2$ il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $0\leqslant t,s\leqslant T$ et $x\in R$*

$$|D^\alpha L(t,x)-D^\alpha L(s,x)|\leqslant C|t-s|^\lambda.$$

Démonstration. Soit $x\in R$, $h>0$ et $0\leqslant t,\ t+h\leqslant T$. D'après la définition de la dérivée fractionnaire on obtient

$$|D^\alpha L(t,x)-D^\alpha L(t+h,x)|$$

$$\leqslant \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty \frac{|L(t,x)-L(t,x-u)-L(t+h,x)+L(t+h,x-u)|}{u^{1+\alpha}}du.$$

Soit $\alpha<\beta<\frac{1}{2}$, $0<\gamma<\frac{1}{2}$ et $0<\xi<\frac{1}{4}$; soit $a>0$. En utilisant les inégalités (2.2), (2.3) et le théorème 2.3, on obtient

$$|D^\alpha L(t,x)-D^\alpha L(t+h,x)|$$

$$\leqslant \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^a \frac{|L(t,x)-L(t,x-u)-L(t+h,x)+L(t+h,x-u)|}{u^{1+\alpha}}du$$

$$+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^{\infty}\frac{|L(t,x)-L(t+h,x)|+|L(t,x-u)-L(t+h,x-u)|}{u^{1+\alpha}}du$$

$$\leqslant C_1\left(h^{\xi}\int_0^a\frac{u^{\beta}}{u^{1+\alpha}}du+h^{\gamma}\int_a^{\infty}\frac{1}{u^{1+\alpha}}du\right)\leqslant C_2(h^{\xi}a^{\beta-\alpha}+h^{\gamma}a^{-\alpha}).$$

En choisissant $a=h^{(\gamma-\xi)/\beta}$, on a

$$|D^{\alpha}L(t,x)-D^{\alpha}L(t+h,x)|\leqslant C_2\,h^{\gamma(1-\alpha/\beta)+\xi(\alpha/\beta)}.$$

Pour tout $0<\lambda<\frac{1}{2}-\alpha/2$ on peut trouver $\alpha<\beta<\frac{1}{2}$, $0<\gamma<\frac{1}{2}$ et $0<\xi<\frac{1}{4}$ telles que $\lambda=\gamma(1-\alpha/\beta)+\xi(\alpha/\beta)$, ce qui entraîne le théorème 3.3. ∎

Remarque 3.4. Soit $T>0$ et $0<\alpha<\frac{1}{2}$. Alors p.s. pour tout $0<\lambda<(1-\alpha)/2$ il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $0\leqslant t,\ s\leqslant T$ et $x\in R$

$$|D^{\alpha}L(t,x)-D^{\alpha}L(s,x)|\leqslant C\frac{|t-s|^{\lambda}}{(1+|x|)^{1+\alpha}}.$$

En effet, soit $T>0$; alors p.s. il existe une constante $A>0$ telle que pour tout $0\leqslant t\leqslant T$

$$\operatorname{supp}L(t,\cdot)\subset[-A,A].$$

Pour $x<-A$ on a $D^{\alpha}L(t,x)=0$ pour tout $0\leqslant t\leqslant T$; pour $-A\leqslant x\leqslant 2A$, on applique le théorème 3.3 et enfin pour $x>2A$ on a

$$|D^{\alpha}L(t,x)-D^{\alpha}L(s,x)|$$

$$\leqslant\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\infty}\frac{|L(t,x)-L(t,x-u)-L(s,x)+L(s,x-u)|}{u^{1+\alpha}}du$$

$$=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{x-A}^{x+A}\frac{|L(s,x-u)-L(t,x-u)|}{u^{1+\alpha}}du.$$

En utilisant cette inégalité et (2.2) on obtient

$$|D^{\alpha}L(t,x)-D^{\alpha}L(s,x)|\leqslant C\frac{|t-s|^{\lambda}}{(1+|x|)^{1+\alpha}}.\ \blacksquare$$

4. RÉGULARITÉ DE LA FONCTIONNELLE ADDITIVE ASSOCIÉE À LA PARTIE FINIE D'HADAMARD

Nous commençons par rappeler la définition de la fonctionnelle additive associée à la partie finie d'Hadamard.

Soit $(B_t,\ t\geqslant 0)$ un mouvement brownien et soit $0<\alpha<\frac{1}{2}$; considérons pour tout $x\in R$ la fonction

$$F_x(u)=\frac{(u-x)_+^{1-\alpha}}{(-\alpha)(1-\alpha)}=\begin{cases}0 & \text{pour } u<x,\\ (u-x)^{1-\alpha}/(-\alpha)(1-\alpha) & \text{pour } u\geqslant x.\end{cases}$$

Alors la fonctionnelle $H^x(-1-\alpha, t)$ — la *fonctionnelle additive associée à la partie finie d'Hadamard* — est définie par la formule d'Itô généralisée suivante:

$$H^x(-1-\alpha, t) = 2\Big(F_x(B_t)-F_x(B_0)-\int_0^t F'_x(B_s)\,dB_s\Big),$$

où $\int_0^t F'_x(B_s)\,dB_s$ est l'intégrale stochastique d'Itô. D'après [17] nous avons une représentation de $H^x(-1-\alpha, t)$ donnée par

$$H^x(-1-\alpha, t) = \cos\big(\pi(1+\alpha)\big)D^\alpha L(t, x)-\sin\big(\pi(1+\alpha)\big)\mathscr{H}\big(D^\alpha L(t, \cdot)\big)(x), \tag{4.1}$$

où $\mathscr{H}(f)$ est la transformée de Hilbert:

$$\mathscr{H}(f)(s) = \int_0^\infty \frac{f(s+u)-f(s-u)}{u}\,du.$$

Proposition 4.1. *Soit* $0<\alpha<\frac{1}{2}$, $t>0$ *et* $1<p<\infty$. *Alors p.s.*

$$H^\cdot(-1-\alpha, t)\in \mathrm{Lip}(p, \tfrac{1}{2}-\alpha).$$

Démonstration. On sait que pour tout $1<p<\infty$, $\mathscr{H}$: $L^p(R)\to L^p(R)$ est un opérateur linéaire borné (voir par exemple [7]); de plus, pour $h\in R$

$$(\mathscr{H}f)(\cdot+h)-(\mathscr{H}f)(\cdot) = \mathscr{H}\big(f(\cdot+h)-f(\cdot)\big).$$

Ces propriétés de $\mathscr{H}$ et le théorème 3.2 entraînent la proposition 4.1. ∎

Proposition 4.2. *Soit* $T, M>0$ *et* $0<\alpha<\frac{1}{2}$. *Alors p.s. pour tout* $0<\lambda<(1-\alpha)/2$ *il existe une constante* $C>0$ *telle que pour tout* $0\leqslant t, s\leqslant T$ *et* $|x|\leqslant M$

$$|H^x(-1-\alpha, s)-H^x(-1-\alpha, t)|\leqslant C\,|s-t|^\lambda.$$

Démonstration. D'après la formule (4.1) et le théorème 3.3, il suffit de vérifier que pour tout $0<\lambda<(1-\alpha)/2$ il existe une constante C telle que pour tout $0\leqslant t, s\leqslant T$ et $|x|\leqslant M$

$$\big|\big(\mathscr{H}D^\alpha L(t, \cdot)\big)(x)-\big(\mathscr{H}D^\alpha L(t+h, \cdot)\big)(x)\big|\leqslant C\,|h|^\lambda.$$

Soit $0<\lambda<(1-\alpha)/2$ et $0<\beta<\frac{1}{2}-\alpha$. Posons $a=|h|^{\lambda/\beta}$. Comme

$$\big(\mathscr{H}D^\alpha L(\tau, \cdot)\big)(x) = \int_0^\infty \frac{D^\alpha L(\tau, x+u)-D^\alpha L(\tau, x-u)}{u}\,du,$$

on obtient d'après l'inégalité (1.2) et la remarque 3.4

$$\big|\big(\mathscr{H}D^\alpha L(t, \cdot)\big)(x)-\big(\mathscr{H}D^\alpha L(s, \cdot)\big)(x)\big|$$

$$\leqslant \int_0^a \frac{|D^\alpha L(t, x+u)-D^\alpha L(t, x-u)|}{u}\,du$$

$$+\int_0^a \frac{|D^\alpha L(s, x+u)-D^\alpha L(s, x-u)|}{u}\,du$$

$$+\int_a^\infty \frac{|D^\alpha L(t, x+u)-D^\alpha L(s, x+u)|}{u}\,du$$

$$+\int_a^\infty \frac{|D^\alpha L(t, x-u)-D^\alpha L(s, x-u)}{u}\,du$$

$$\leqslant C_2\Bigg(\int_0^a u^{\beta-1}\,du+|t-s|^\lambda \int_a^{2M} \frac{1}{u}\,du$$

$$+|t-s|^\lambda \int_{2M}^\infty \frac{1}{u}\left(\frac{1}{(|x+u|+1)^{1+\alpha}}+\frac{1}{(|x-u|+1)^{1+\alpha}}\right)du\Bigg)$$

$$\leqslant C_3\,|t-s|^\lambda\left(\ln\frac{1}{|t-s|}+\ln(2M)\right),$$

ce qui achève la preuve de la proposition 4.2. ∎

Remarque 4.3. Considérons la fonctionnelle additive du mouvement brownien associée à la valeur principale de Cauchy:

$$C_t^x = 2\left((B_t-x)\ln(|B_t-x|)-(B_t-x)-\int_0^t \ln(|B_s-x|)\,dB_s\right), \qquad x\in R,\ t\geqslant 0.$$

D'après [15] et [17] on sait que C_t^x est p.s. hölderienne d'indice γ pour tout $0<\gamma<\frac{1}{2}$ et qu'elle a la représentation suivante:

$$C_t^x = \mathscr{H}\big(L(t,\cdot)\big)(x).$$

Le théorème 2.3 et les propriétés de la transformée de Hilbert entraînent que pour tout $t\geqslant 0$ et $1<p<\infty$ p.s. $C_t^{\cdot}\in \mathrm{Lip}(p, \frac{1}{2})$.

TRAVAUX CITÉS

[1] J. Bertoin, *Application de la théorie spectrale des cordes vibrantes aux fonctionnelles additives principales d'un brownien refléchi*, Ann. Inst. H. Poincaré 25 (3) (1989), pp. 323–367.

[2] — *Complements on the Hilbert transform and the fractional derivative of brownian local time*, J. Math. Kyoto Univ. 30 (4) (1990), pp. 651–670.

[3] Ph. Biane et M. Yor, *Valeurs principales associées aux temps locaux browniens*, Bull. Sci. Math. Sér. 2, 11 (1987), pp. 23–101.

[4] B. Boufoussi, *Régularité du temps local brownien dans les espaces de Besov–Orlicz*, Studia Math. 118 (2) (1996), pp. 145–156.

[5] — et B. Roynette, *Un théorème de régularité du temps local brownien*, preprint, Institut E. Cartan, Univ. de Nancy I, 1992.

[6] B. Boufoussi et B. Roynte, *Le temps local brownien appartient p.s. à l'espace de Besov* $B^{1/2}_{p,\infty}$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I, 316 (1993), pp. 843–848.
[7] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators*, Part II, Interscience Publishers, 1963.
[8] H. Ezawa, J. R. Klauder and L. A. Sheep, *Vestigical effects of singular potentials in diffusion theory and quantum mechanics*, J. Math. Phys. 16, 4 (1975), pp. 783–799.
[9] M. Fukushima, *A decomposition of additive functionals of finite energy*, Nagoya Math. J. 74 (1979), pp. 137–168.
[10] K. Itô and H. P. Mackean, *Diffusion Processes and Their Sample Paths*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1965.
[11] S. Nakao, *Stochastic calculus for continuous additive functionals of zero energy*, Z. Wahrsch. verw. Gebiete 68 (1985), pp. 557–578.
[12] E. Perkins, *The exact Hausdorff measure of the level sets of brownian motion*, ibidem 58 (1981), pp. 373–388.
[13] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Maritchev, *Integrals and Derivatives of Fractional Order and Their Applications*, Nauka i Tekhnika, Minsk 1987 (en russe).
[14] H. Trotter, *A property of brownian motion paths*, Illinois J. Math. 2 (1958), pp. 425–433.
[15] T. Yamada, *On some representation concerning the stochastic integrals*, Probab. Math Statist. 4 (2) (1984), pp. 153–166.
[16] — *On the fractional derivative of the brownian local time*, J. Math. Kyoto Univ. 25 (1) (1985), pp. 49–58.
[17] — *On some limit theorems for occupation times of one-dimensional brownian motion and its continuous additive functionals locally of zero energy*, ibidem 26 (2) (1986), pp. 309–322.
[18] M. Yor, *Sur la transformée de Hilbert des temps locaux browniens et une extension de la formule de Itô*, Sém. Probab. 16 (1982), pp. 238–247.

B. Boufoussi
Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Mathématiques
B.P. S 15, Marrakech, Maroc

M. Eddahbi
Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques
B.P. 618, Marrakech, Maroc

A. Kamont
Instytut Matematyczny PAN
ul. Abrahama 18
81-825 Sopot, Pologne
email a.kamont@impan.gda.pl

Received on 13.1.1997