Wrocław, 24 lutego 2022

MATEMATYKA UNIWERSYTECKA W LO - SKRYPT

MARCIN PREISNER [MARCIN.PREISNER@UWR.EDU.PL]

Spis treści

Wstęp

Niniejszy skrypt zawiera materiały na zajęcia uniwersyteckie dla licealistów z XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu. Na początku każdego rozdziału znajdują się wiadomości teoretyczne, twierdzenia i przykłady. Potem następują zadania, które podzielone są na: ćwiczenia, zadania i problemy. Spora część zadań jest zapożyczona z wielu różnych źródeł. Skrypt jest w trakcie powstawania. Aktualna wersja znajduje się na stronie:

http://www.math.uni.wroc.pl/~preisner/dyd/skrypt/skrypt_Preisner.pdf

Oznaczenia. Zbiór liczb naturalnych $\{1, 2, 3, ...\}$ będziemy odznaczali przez $\mathbf{N}$ i będziemy przyjmować, że zero nie jest liczbą naturalną (jest to tylko kwestia konwencji). Liczby całkowite oznaczamy przez $\mathbf{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$, liczby wymierne przez $\mathbf{Q}$, a liczby rzeczywiste przez $\mathbf{R}$. Do zapisu sum i iloczynów będziemy używać notacji:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{n-1} + a_n,$$

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n.$$

Wybrane oznaczenia:

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0, \end{cases}$$

Zapis $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x, $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x. Mamy

$$x = [x] + \{x\}.$$

1. LOGIKA MATEMATYCZNA

1.1. **Wprowadzenie.** W tym rozdziale poznamy podstawy logiki matematycznej i pojęcia takie jak: zdania logiczne, spójniki logiczne, twierdzenia, kwantyfikatory, itd.

1.1.1. *Rachunek zdań.*

Definicja 1.1
Zdaniem logicznym nazywamy dowolne zdanie, które jest prawdziwe lub fałszywe.

Rozważmy zdania:

- p_1: liczba 3 jest naturalna,
- p_2: równanie $x^2 + 1 = 0$ ma rozwiązanie wymierne,
- p_3: ładna jest dziś pogoda,
- p_4: liczba n dzieli się przez 3.

Zdanie p_1 jest prawdziwe (piszemy: $p_1 = 1$), zdanie p_2 fałszywe ($p_2 = 0$). p_3 i p_4 nie są zdaniami logicznymi. Jednak p_4 może być zdaniem logicznym, jeśli myślimy o konkretnym n (wtedy dla niektórych n jest prawdziwe, a dla innych fałszywe).

Dla każdego zdania p możemy zapisać negację $\neg p$, która jest prawdziwa dokładnie wtedy gdy p jest fałszywe.

Często zdania są bardziej skomplikowane i składają się z mniejszych zdań ("zdań prostych") połączonych spójnikami logicznymi. Czterema podstawowymi spójnikami są:

- $\wedge$ – koniunkcja, czyli spójnik "i",
- $\vee$ – alternatywa, czyli spójnik "lub",
- $\implies$ – implikacja,
- $\iff$ – równoważność (czytamy czasem "wtedy i tylko wtedy, gdy").

Przyjmujemy, że koniunkcja $A \wedge B$ jest prawdziwa dokładnie wtedy, gdy oba zdania A i B są prawdziwe. Alternatywa $A \vee B$ jest prawdziwa, gdy przynajmniej jedno ze zdań: A, B jest prawdziwe (mogą być oba). Równoważność $A \iff B$, jest prawdziwa, jeśli oba zdania mają tę samą wartość logiczną (oba prawdziwe lub oba fałszywe).

Z implikacją trzeba trochę uważać, bo nie do końca zgadza ona się z mową potoczną. W matematyce implikacja jest prawdziwa nie tylko wtedy, gdy z prawdy wynika prawda, ale również gdy z nieprawdy wynika cokolwiek (prawda lub nieprawda). Przy tej okazji napiszemy pierwszą tabelkę logiczną rozpatrującą te przypadki:

p	q	$p \implies q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Tabelki takie zawierają wszystkie możliwe przypadki wartości logicznych zdań p i q i będą się czasem pojawiały przy analizie bardziej skomplikowanych zdań logicznych. Oto niektóre prawa rachunku zdań:

1. $(p \wedge q) \iff (q \wedge p)$,
2. $(p \vee q) \iff (q \vee p)$,
3. $((p \wedge q) \wedge r) \iff (p \wedge (q \wedge r))$,
4. $((p \vee q) \vee r) \iff (p \vee (q \vee r))$,
5. $((p \vee q) \wedge r) \iff ((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$,

6. $((p \wedge q) \vee r) \iff ((p \vee r) \wedge (q \vee r))$,

Prawa de Morgana:

7. $(\neg(p \vee q)) \iff (\neg p \wedge \neg q)$
8. $(\neg(p \wedge q)) \iff (\neg p \vee \neg q)$

Prawo eliminacji implikacji:

9. $(p \implies q) \iff (\neg p \vee q)$

Prawo wyłączonego środka:

10. $p \vee \neg p$.

Zbudujemy teraz większą tabelkę, aby uzasadnić jedno z praw de Morgana (**7.**).

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$(\neg(p \vee q)) \iff (\neg p \wedge \neg q)$
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0	1

W pierwszych dwóch kolumnach wypisaliśmy wszystkie możliwości na prawdziwość zdań p i q, a następnie rozważając każdy przypadek doszliśmy do tego, że zawsze prawo $(\neg(p \vee q)) \iff (\neg p \wedge \neg q)$ (**7.**) jest prawdziwe. Możemy więc powiedzieć, że jest to *prawo logiczne* lub *tautologia*.

Wróćmy teraz na chwilę do przykładu D z początku rozdziału. Nie jest to zdanie logiczne, ale *funkcja zdaniowa*.

Definicja 1.2
Funkcją zdaniową nazywamy formułę $p(x)$, która dla x–ów z pewnego zbioru X (piszemy $x \in X$) jest zdaniem logicznym.

1.1.2. *Kwantyfikatory.* Przypomnijmy, że funkcją zdaniową nazywamy wyrażenie $p(x)$ dla x–ów z pewnego zbioru X (może to być zbiór liczbowy, zbiór pewnych figur, funkcji, itp.). Zdanie $p(x)$ dla każdego szczególnego x musi być prawdziwe lub fałszywe. Czasem chcemy zapisać, że takie zdanie jest zawsze prawdziwe i możemy to zrobić tak:

$$(\forall x \in X) \quad p(x). \tag{1.1}$$

Oznacza to dokładnie, że dla wszystkich x ze zbioru X zdanie $p(x)$ ma wartość logiczną 1. Symbol $\forall$ jest jednym z *kwantyfikatorów*.

Drugim kwantyfikatorem jest symbol $\exists$, który możemy użyć następująco:

$$(\exists x \in X) \quad p(x). \tag{1.2}$$

Powyższe zdanie oznacza, że istnieje przynajmniej jeden (może jeden, może dwa, może wszystkie, ...) x taki, że zdanie $p(x)$ jest prawdziwe dla tego wybranego x.

Zauważmy, że o ile $p(x)$ jest funkcją zdaniową, to (1.1) i (1.2) są już zdaniami (czyli są prawdziwe lub fałszywe).

Jak zanegować zdania z kwantyfikatorami?

1.2. **Lista zadań.**

1. Oceń, czy to prawda, że
- $2 + 2 = 2$ lub 7 jest liczbą naturalną,
- $x > 7$,

- jeśli 7 jest liczbą naturalną, to $1 = 0$,
- jeśli $2 + 2 = 2$, to $2 + 2 = 2$,
- jeśli $2 + 2 = 2$, to $2 + 2 = 4$,
- To zdanie jest fałszywe.

2. Rozważmy zdania:
- Rzym jest stolicą Włoch i $2 + 2 = 4$.
- $\sqrt{17} > 3 + \sqrt{7}$ lub kwadrat jest rombem.
- Równanie $x + 2 = 0$ ma rozwiązanie oraz Ala ma kota.
- Skowronek jest ptakiem lub zięba jest ssakiem.
- 7 jest liczbą dodatnią natomiast $--\sqrt{2}$ jest liczbą ujemną.
- Jeśeli kwadrat jest rombem, to 195 jest podzielne przez 5.
- Jeśli $\sqrt{2} > 3$, to $2 + 2 = 4$ lub $7 > 0$.
- x jest liczbą naturalną o ile x jest liczbą całkowitą i x jest dodatnie.
- Z faktu, że Polska graniczy z Czechami i Czechy graniczą ze Szwecją, wynika, że Polska graniczy z Austrią.
- Jeśli nie jest prawdą, że trójkąt jest równoboczny, to nie jest również równoramienny.

(a) Rozpoznaj w powyższych zdaniach złożonych zdania proste.
(b) Zapisz powyższe zdania posługując się spójnikami logicznymi.

3. Zapisz tabelkę działania dla spójników: $\neg, \wedge, \vee, \iff$.

4. Czy dla wszystkich liczb naturalnych n prawdziwe są następujące zdania?
(a) n nie jest podzielne przez 3, jeśli n jest liczbą pierwszą.
(b) n jest podzielne przez 12, o ile jest podzielne przez 3 i 4.
(c) Jeśli n jest liczbą pierwszą, to o ile n jest liczbą złożoną, to $n = 4$.
(d) n jest podzielne przez 2 pod warunkiem, że n jest podzielne przez 5 i $5 < n < 15$.
(e) n jest podzielne przez 3 dokładnie wtedy, gdy n jest podzielne przez 7.

---

5. Sformułuj zaprzeczenia poniższych zdań. Które z tych zaprzeczeń są zdaniami prawdziwymi?
- 7 jest liczbą naturalną,
- 7 jest liczbą naturalną lub $1 > 0$,
- 7 jest liczbą naturalną i $1 > 0$,
- jeśli 7 jest liczbą naturalną, to $1 > 0$,
- 7 jest liczbą naturalną lub $1 > 0$ lub $2 + 2 = 4$,
- $2^3 = 8$ i $4^2 = 16$ lub $2 + 2 = 4$ i $\sqrt{4} = 3$,
- 7 nie jest liczbą parzystą,
- Nieprawda, że 7 nie jest liczbą nieparzystą.

6. Sformułuj własne prawo rachunku zdań i wykaż, że istotnie takie jest.

7. Zapisz poniższe schematy nie używając znaku negacji ani implikacji (w razie potrzeby używając podstawień $p' = \neg p$, $q' = \neg q$ i $r' = \neg r$)
- $\neg(p \vee (\neg q \wedge r))$,
- $p \implies (q \implies r)$,
- $\neg(p \implies (p \vee r))$,

- $p \iff q$.

8. Rozważ różne schematy ćwiczenia 2, zaneguj je i zapisz nie używając negacji (tak, jak w zadaniu 7 z tej listy).

9.
- $p(n) =$"n jest podzielne przez 17";
- $q(n) =$"n jest parzyste";
- $r(n) =$"n jest liczbą pierwszą";
- $s(n) =$"n jest z przedziału $[7, 28]$.

Które spośród liczb $1, 2, \ldots, 50$ spełniają poniższe własności

(a) $p(n)$;
(b) $s(n)$;
(c) $p(n) \wedge q(n)$;
(d) $p(n) \wedge r(n)$;
(e) $r(n) \wedge \neg s(n)$;
(f) $(\neg p(n)) \implies s(n)$;
(g) $q(n) \iff r(n)$;
(h) $(p(n) \vee q(n)) \wedge r(n)$

10. Dla każdego z poniższych zbiorów wymyśl funkcję zdaniową $p(n)$, która "wytnie" go ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 50\}$. Postaraj się, żeby zapisać $p(n)$ w postaci prostych funkcji zdaniowych połączonych spójnikami logicznymi.

(a) $\{10, 20, 30, 40, 50\}$,
(b) $\{9, 18, 27, 36, 45\}$,
(c) $\{6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46\}$,
(d) $\{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$,
(e) $\{2\}$,
(f) $\{3, 17, 48\}$.

11. Wiemy, że funkcja zdaniowa $r(n)$ jest równoważna

$$(p(n) \implies q(n)) \iff (\neg p(n) \vee q(n)),$$

gdzie $p(n)$ i $q(n)$ są pewnymi funkcjami zdaniowymi (o liczbach naturalnych). Dlaczego możemy wnioskować, że $r(n)$ jest prawdziwe dla wszystkich liczb naturalnych? Czy moglibyśmy tak wnioskować, gdyby $r(n)$ było równoważne

$$p(n) \iff (p(n) \iff q(n))?$$

12. Rozważmy funkcje zdaniowe o zakresie liczb rzeczywistych:

(a) $p(x) =$ "$x + 5 = \frac{x}{2}$";
(b) $q(x) =$ "$x + 5 < \frac{x}{2}$";
(c) $r(x) =$ "x jest liczbą wymierną".

Dla których liczb rzeczywistych prawdziwe są zdania $p(x)$, $q(x)$, $q(x) \wedge r(x)$, $p(x) \implies r(x)$?

13. Niech
- $p(n) =$"n jest podzielne przez 3";
- $q(n) =$"n liczbą pierwszą";
- $r(n) =$"n jest z przedziału $[7, 10]$".

Podaj przykład zbioru , którego nie da się "wyciąć" ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ za pomocą funkcji zdaniowej zbudowanej z p, q, r (przy pomocy spójników logicznych). Ile różnych zbiorów można "wyciąć" ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ za pomocą funkcji zdaniowych takich postaci?

14. Przetłumacz poniższe zdania (?) na *potoczny* język matematyczny. Które z tych zdań są prawdziwe? Które nie mają sensu?

(a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 \geq n$,
(b) $\forall n \quad (n \in \mathbb{N} \implies n^2 \geq n)$,
(c) $\forall r \in \mathbb{R} \quad (r \geq 0 \vee r^2 > 0)$,
(d) $(\forall r \in \mathbb{R} \quad r \geq 0) \vee (\forall r \in \mathbb{R}\ r^2 > 0)$,
(e) $\exists n \in \mathbb{N} \quad \exists k \in \mathbb{N}\ 2k = n$,
(f) $\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}\ k \cdot n \geq k + n$,
(g) $\forall n \in \mathbb{N} \quad (n > 0 \implies n^2 > 0)$,
(h) $\exists n \in \mathbb{N} \quad (n > 0 \implies n^2 > 0)$,
(i) $\exists n \in \mathbb{N} \quad \exists k \in \mathbb{N}\ k \neq n$,
(j) $\forall r \in \mathbb{R} \quad \exists s \in \mathbb{R}\ r \cdot s < 0$,
(k) $\forall r \in \mathbb{R} \quad r^2 > k$,
(l) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N}\ n^2 = 4$,
(m) $\forall n \in \mathbb{N} \quad ((\exists k \in \mathbb{N}\ 2k = n) \implies (\exists l \in \mathbb{N}\ 2l = n))$,
(n) $\forall n \in \mathbb{N}\ ((\exists k \in \mathbb{N} \quad 2k = n) \implies (\exists k \in \mathbb{N}\ 2k = n))$,
(o) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N \quad \frac{1}{n} < \varepsilon$,
(p) $\forall n\ \exists k \quad \exists l\ (n < k \wedge 2l = k)$ (zakres kwantyfikatorów: $\mathbb{N}$),
(q) $\forall n\ \exists k \quad \forall l\ (n > k \vee n = l \vee (n > k \implies n = l)$ (zakres kwantyfikatorów: $\mathbb{N}$)

15. Czy podane zdania są prawdziwe dla każdych funkcji zdaniowych φ i ψ? (Tutaj φ jest funkcją jednoargumentową lub dwuargumentową, zależnie od kontekstu.) Jeśli nie, to podaj konkretne funkcje zdaniowe φ i ψ (np. mówiące o liczbach rzeczywistych lub o liczbach naturalnych) takie, że odpowiednie zdania są fałszywe:

(a) $(\exists x\ \varphi(x)) \implies (\forall x\ \varphi(x))$,
(b) $(\forall x\ \varphi(x)) \implies (\exists x\ \varphi(x))$,
(c) $(\forall x\ \exists y\ \varphi(x, y)) \implies (\exists x\ \forall y\ \varphi(x, y))$,
(d) $(\exists x\ \exists y\ \varphi(x, y)) \implies (\exists x\ \varphi(x, x))$,
(e) $(\forall x\ \exists y\ \varphi(x, y)) \implies (\forall x\ \varphi(x, x))$,
(f) $(\forall x\ \varphi(x, x)) \implies (\forall x\ \forall y\ \varphi(x, y))$,
(g) $(\forall x\ (\varphi(x) \vee \psi(y))) \implies ((\forall x\ \varphi(x)) \vee (\forall x\ \psi(x)))$.

16. Zapisz negacje poniższych zdań bez użycia znaku negacji:

(a) $\forall r \in A\ r > 0$,
(b) $\exists r \in A\ r > 0$,
(c) $\forall r \in A\ \exists s \in A\ r > s$.

Jak powinien wyglądać odpowiednik praw de Morgana dla rachunku kwantyfikatorów?

17. Przetłumacz poniższe zdania na język "formalny".. . .

(a) Każda liczba naturalna jest nieujemna.
(b) Istnieje liczba naturalna, która jest parzysta.
(c) Nie wszystkie liczby naturalne są nieparzyste.
(d) Każda liczba naturalna podzielna przez 4 jest liczbą parzystą.
(e) 5 jest liczbą pierwszą.
(f) Każda liczba pierwsza jest nieparzysta.

(g) Każda liczba pierwsza większa od 2 jest nieparzysta.

(h) Każda liczba większa od 5 i mniejsza od 15, która jest podzielna przez 5, jest podzielna przez 2.

(i) Zbiór A ma co najwyżej dwa elementy.

(j) Istnieją przynajmniej dwie liczby naturalne parzyste.

(k) Istnieje nieskończenie wiele liczb parzystych.

(l) Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

(m) Każda liczba większa od 5, należąca do zbioru A, nienależąca do zbioru B i podzielna przez 5, jest podzielna przez 2 o ile należy do zbioru C.

18. Zapisz poniższe zdania za pomocą podanych funkcji zdaniowych, kwantyfikatorów, spójników logicznych itd.

(a) "Wszystkie koty to dranie", $\phi(x) =$ "x to drań", X – zbiór kotów.

(b) "W każdej rodzinie znajdzie się czarna owca", X – zbiór rodzin, Y – zbiór owiec, $\phi(x) =$"x jest czarny".

(c) "Każdy uczeń Ia ma pomysł, który zadziwi wszystkich uczniów Ia", X – zbiór uczniów Ia, Y – zbiór pomysłów, $\phi(x, y) =$"x ma y", $\psi(x, y) =$"x zadziwi y".

(d) "Każdy uczeń Ia, który nie gra w mafię, lubi pewnego ucznia Ia, który lubi wszystkich uczniów Ia grających w ping–ponga", $X =?$, $\phi(x) =?$, $\psi(x) =?$, $a(x, y) =?$

2. LICZBY WYMIERNE I NIEWYMIERNE

2.1. **Wprowadzenie.** Liczby naturalne, całkowite i wymierne (jak również działania w tych zbiorach) są zdefiniowane bardzo naturalnie. Przypomnijmy tylko, że liczby wymierne to liczby, które można zapisać w postaci $\frac{p}{q}$, gdzie $p \in \mathbf{Z}$ oraz $q \in \mathbf{N}$, oraz że takich zapisów dla każdej liczby wymiernej jest nieskończenie wiele.

Aby dokładnie poznać liczby rzeczywiste, a co za tym idzie - niewymierne $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, musimy ustalić czym dokładnie taka liczba rzeczywista jest. Zaczniemy od ważnego przykładu.

Przykład 2.1
Liczba $0,999... = 0,(9)$ jest wymierna i wynosi dokładnie 1.

Dowód. Oznaczmy $x = 0,(9)$. Wtedy $10x = 9,(9)$ oraz $10x - x = 9$. Zatem $x = 1$. □

Można powiedzieć, że powyższy przykład jest trochę ”oszukany”, bo nie powiedzieliśmy jeszcze dokładnie czym są liczby rzeczywiste, skąd więc możemy wiedzieć, że liczba $0,(9)$ istnieje i jak zdefiniować na niej działania. Okaże się jednak, że to wszystko miało prawdziwy sens. Zauważmy jednak, że trzeba do tego typu trików podchodzić ostrożnie - rozważmy $y = 1+3+9+27+81+243+\ldots$. Wówczas $y = 1+3\cdot1+3\cdot3+3\cdot9+3\cdot27+3\cdot81+3\cdot243+\ldots = 1+3\cdot(1+3+9+27+81+243+\ldots) = 1+3y$, skąd $y = -1/2$. Jak to możliwe, że suma liczb całkowitych dodatnich jest ujemna i niecałkowita? Nie jest to możliwe, bo okaże się, że y nie jest liczbą rzeczywistą.

Istnieje kilka podejść do ”konstrukcji” liczb rzeczywistych z liczb wymiernych. Ponieważ są one dość ”techniczne”, nasza definicja zbioru $\mathbf{R}$ będzie następująca.

Definicja 2.2
Liczbą rzeczywistą nazywamy dowolne rozwinięcie dziesiętne

$$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \ldots,$$

gdzie $n \in \mathbf{N}$.

W powyższym przedstawieniu a_2 jest po prostu liczbą setek (jeśli występuje), a a_{-1} pierwszą liczbą po przecinku.

Uwaga 2.3
Ponieważ widzieliśmy, że $1,000... = 0,999...$, więc pewne, formalnie różne, przedstawienia liczb w postaci zapisu dziesiętnego dają tę samą liczbę. Musimy więc dodać, że każda liczba, która kończy się nieskończoną liczbą dziewiątek (np. 12345,678(9)) oraz liczba powiększoną o 1 na pierwszym miejscu przed dziewiątkami i mającą nieskończenie wiele zer na dalej (tutaj: $12345,679$) są tą samą liczbą. Wśród pozostałych liczb już nie ma takiego problemu.

Tak zdefiniowany zbiór $\mathbf{R}$ ma wszystkie pożądane własności. Można wykonywać wszystkie działania arytmetyczne, występuje naturalny porządek (wiemy która z dwóch różnych liczb rzeczywistych jest większa), zachodzą prawa rozdzielności, itd. Nie będziemy tutaj wnikać w omawianie wszystkich szczegółów.

2.1.1. *Uwagi.* Przyjrzyjmy się podziałowi $\mathbf{R}$ na $\mathbf{Q}$ (wymierne) i $\mathbf{IQ} = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ (niewymierne).

Fakt 2.4
Liczby rzeczywiste wymierne, to dokładnie te, które mają postać dziesiętną skończoną lub okresową.

Dowód. Jeśli liczba jest wymierna, to jest postaci $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}$, i z algorytmu dzielenia z resztą wynika, że przyjmuje postać dziesiętną skończoną ("dzielenie się kończy") lub okresową ("dzielenie się zapętla").

Odwrotnie, gdy liczba rzeczywista x ma postać skończoną, to jest postaci $x = \frac{n}{10^N}$, czyli jest wymierna. Jeśli natomiast x ma okres długości N, to $10^N x - x = 99...99x$ jest liczbą o rozwinięciu skończonym, czyli $99...99x$ jest wymierna i wtedy x również jest wymierna. $\square$

Ważnym faktem jest tzw. "gęstość" liczb wymiernych (lub niewymiernych) w zbiorze liczb rzeczywistych. Ten fakt można zapisać następująco.

Fakt 2.5
W dowolnym przedziale (a, b) na prostej rzeczywistej $(a < b)$ znajduje się zarówno liczba wymierna, jak i niewymierna.

Dowód. Niech $d = b - a$ będzie długością przedziału (a, b). Rozważmy środek przedziału $c = (a + b)/2$. Mamy dwa przypadki:

- jeśli c jest wymierne, to $x = c + \frac{\sqrt{2}}{2^N}$ jest niewymierne (patrz ćwiczenie 5) oraz dla N tak dużego, że $\frac{\sqrt{2}}{2^N} < d/2$ liczba x należy do przedziału (a, b),
- jeśli c jest niewymierne, to ucinając zapis dziesiętny liczby c od miejsca N zmieniamy c w liczbę wymierną i zmieniamy ją o najwyżej 10^{-N+1}. Biorąc N tak duże, że $10^{-N+1} < d/2$ dostajemy w ten sposób liczbę wymierną, która jest w przedziale (a, b).

$\square$

Konsekwencją tego faktu jest ważna własność: dowolnie blisko każdej liczby rzeczywistej x leżą zarówno liczby wymierne jak i niewymierne. Aby to zobaczyć wystarczy zastosować fakt 2.5 do przedziałów $(x - 10^{-n}, x + 10^{-n})$.

2.1.2. *Przykłady.*

Przykład 2.6
Liczba $123,43434343...$ jest równa $\frac{12220}{99}$.

Dowód. Niech x oznacza liczbę rzeczywistą $123,(43)$. Wtedy $100x = 12343,(43)$ i odejmując stronami dostajemy $99x = 12220$, a więc $x = \frac{12220}{99}$. $\square$

Przykład 2.7
Liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna, tzn. nie istnieje liczba wymierna, której kwadrat wynosi 2.

Dowód. Skorzystamy z metody "nie wprost". Gdyby $\sqrt{2}$ był wymierny, to istniałyby $p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}$ takie, że $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, albo inaczej $2 = \frac{p^2}{q^2}$. Dodatkowo możemy założyć, że p i q nie mają wspólnych dzielników pierwszych, czyli "postać $\frac{p}{q}$ jest nieskracalna". Po pomnożeniu przez q^2 dostajemy $2q^2 = p^2$ z czego wynika, że p musi być liczbą parzystą. Niech $p = 2r$. Wtedy $2q^2 = 4r^2$, czyli $q^2 = 2r^2$, z czego z kolei wynika, że q jest liczbą parzystą. Ponieważ 2 jest dzielnikiem zarówno p jak i q dochodzimy do sprzeczności co kończy dowód nie wprost. $\square$

Przykład 2.8
Liczba $\log_2 3$ jest niewymierna.

Dowód. Przeprowadzimy kolejny dowód nie wprost[1]. Załóżmy, że liczba $\log_2 3$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych, $n, m \in \mathbf{N}$. Wówczas $\log_2 3 = \frac{m}{n}$ jest równoważne równaniu

$$2^{m/n} = 3,$$

a to oznacza, że $2^m = 3^n$. Ta ostatnia równość nie jest jednak możliwa, gdyż liczba 2^m jest parzysta, a liczba 3^n nieparzysta. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_2 3$ nie jest liczbą wymierną. □

Przykład 2.9
Liczba $\sqrt{5} + \sqrt[3]{2}$ jest niewymierna.

Dowód. Niewymierność liczby $\sqrt{5} + \sqrt[3]{2}$ będzie wynikała z niewymierności liczby $\sqrt{5}$ (patrz przykład 2.7 oraz zadanie 8). Załóżmy nie wprost, że istnieje $r \in \mathbf{Q}$ takie, że $\sqrt{5} + \sqrt[3]{2} = r$. Przekształcając,

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{2} &= r - \sqrt{5} && /(...)^3 \\
2 &= r^3 - 3r^2\sqrt{5} + 3r \cdot 5 - 5\sqrt{5} && /\text{wyznaczamy } \sqrt{5} \\
\sqrt{5} &= \frac{r^3 + 15r - 2}{3r^2 + 5}
\end{aligned}$$

□

2.2. **Lista zadań.**

1. Zamień liczby w postaci ułamkowej na postać dziesiętną i odwrotnie:
   (a) $\frac{3}{7}$, $\frac{31}{70}$, $\frac{4}{17}$, $\frac{17}{101}$,
   (b) $0,125$, $0,123(45)$, $0,(271)$, $4,23(45)$, $0,1(270)$.
2. Zapisz liczby w postaci nieskracalnej, a potem dziesiętnej:
$$\frac{2^{13}5^4 7^3}{2^9 5^5 7^2}, \quad \frac{21^4 10^2}{5^3 7^4}.$$
3. Pokaż, że następujące liczby są niewymierne:
$$\sqrt{7}, \quad \sqrt{15}, \quad \sqrt[3]{3}, \quad \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$
4. Pokaż, że liczba $\log_3 11$ jest niewymierna.
5. Pokaż, że suma liczby wymiernej i niewymiernej jest niewymierna. Czy suma dwóch liczb niewymiernych musi być niewymierna?

---

6. Oblicz podając wynik w postaci ułamka zwykłego
   (a) $\sqrt{0,(4)} + \sqrt[3]{3,374(9)}$
   (b) $(0,2(9) + 1,(09)) \cdot 12,(2)$
   (c) $(0,(037))^{0,(3)}$
7. Dowiedź, że liczba $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.
8. Dla jakich $n \in \mathbf{N}$ liczba $\sqrt{n}$ jest wymierna?

[1] bo jak inaczej pokazać, że coś "nie jest"?

9. Dowiedź, że liczba $\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ jest niewymierna.

10. Pokaż, że liczba $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ jest niewymierna.

11. Dowiedź, że liczba $\log_{12} 18$ jest niewymierna.

12. Dowiedź, że liczba $\sqrt{\log_4 25}$ jest niewymierna.

13. Dla liczby wymiernej dodatniej $q = m/n$, gdzie $m, n \in \mathbf{N}$, zapisz warunek $\log_2 3 < q$. Wykorzystaj ten warunek do porównania $\log_2 3$ z liczbami $3/2$, $5/3$ oraz $8/5$.

14. Rozstrzygnij, czy liczba $\log_2 3 + \log_4 5$ jest wymierna, czy niewymierna.

15. Pokaż błędy w poniższych rozwiązaniach zadania: pokaż, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie I: Liczba $-\sqrt{2}$ jest niewymierna. Także liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}$ jest niewymierna, bo gdyby była wymierna, to jej kwadrat $3-\sqrt{8}$ też byłby liczbą wymierną, a nie jest. Zatem liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest niewymierna jako suma liczb niewymiernych.

Rozwiązanie II: Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest wymierna i oznaczmy ją przez w. Wtedy

$$w = \sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$$

$$w+\sqrt{2} = \sqrt{3-\sqrt{8}}$$

$$w^2+2\sqrt{2}w+2 = 3-2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2}(w+1)+(w-1)(w+1) = 0$$

Dzieląc ostatnią równość przez $w+1$ otrzymujemy

$$2\sqrt{2}+w-1=0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby w, gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.

16. Niech n będzie liczbą naturalną. Mając do dyspozycji nawiasy, n, liczby całkowite oraz znaki $+, -, \cdot, :$ i $\sqrt{}$ zapisać liczbę niewymierną dodatnią mniejszą od $\frac{1}{n}$.

17. Liczby a i b są dodatnie i niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a+b$ jest niewymierna?

18. Liczby $a+b$, $b+c$ i $c+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c są wymierne?

19. Liczby $a+b$, $b+c$ i $c+a$ są niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a+b+c$ jest niewymierna?

20. Liczby $a+b$, $b+c$, $c+d$ i $d+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c, d są wymierne?

21. Wskaż liczbę wymierną pomiędzy $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ oraz $\frac{1}{\sqrt{5}}$ oraz liczbę niewymierną pomiędzy $\frac{2}{\sqrt{5}}$ oraz $\frac{3}{\sqrt{10}}$.

---

22. Dowiedź, że nie istnieje liczba wymierna q spełniająca równość

$$q^q = 5\ .$$

23. Dowiedź, że liczba $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.

24. Czy liczba

$$\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$$

jest wymierna?

25. Czy liczba $\sqrt{57-40\sqrt{2}}-\sqrt{57+40\sqrt{2}}$ jest całkowita?

26. Dowiedź, że

$$\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{7-\sqrt{48}}=1.$$

27. Jak poznać z postaci ułamka $\frac{p}{q}$ (p, q są względnie pierwsze), czy liczba ma zapis dziesiętny skończony, czy okresowy?

28. Co można powiedzieć o postaci ułamka $\frac{p}{q}$, jeśli liczba ma zapis dziesiętny:

(a) skończony

(b) okresowy?

29. Wyznaczyć wszystkie takie pary (a,b) liczb wymiernych dodatnich, że:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{4+\sqrt{7}}$$

30. Pokaż, że liczba $\sqrt{n}+\sqrt{m}$ $(n, m \in \mathbf{N})$ jest wymierna tylko wtedy, gdy każdy ze składników jest liczbą wymierną.

31. Pokaż, że poniższe rozwinięcia dziesiętne odpowiadają liczbom niewymiernym.

$$0,101001000100001..., \qquad 0,123...8910111213...192021...$$

3. INDUKCJA MATEMATYCZNA

3.1. **Wprowadzenie.** Zbiór liczb naturalnych oprócz działań arytmetycznych posiada naturalny *porządek*, tzn. dla każdych dwóch liczb n, m możemy określić, że jedna z nich jest większa od drugiej lub są sobie równe. Porządek ten ma pewną dodatkową własność - każda liczba ma *następującą* i *poprzedzającą* (z wyjątkiem jedynki). Ponadto, zachodzi następujący fakt.

Fakt 3.1
Każdy niepusty zbiór zawarty w zbiorze liczb naturalnych ma element najmniejszy.

Fakt ten jest zupełnie naturalny i będzie to dla nas aksjomat (coś, co przyjmujemy jako prawdę bez dowodu). Przypomnijmy, że *zdaniem logicznym* jest dowolne stwierdzenie mogące być prawdziwe albo nieprawdziwe. Stwierdzenia, które zawierają zmienną, np. $T(n)$: "jest prawdą, że $n \geq 2$"(w skrócie, $T(n): \ n \geq 2$) , stają się zdaniami logicznymi, gdy myślimy o konkretnym $n \in \mathbf{N}$ (w tym wypadku nieprawdziwym dla $n = 1$ i $n = 0$, a prawdziwym w pozostałych przypadkach). Takie zawierające zmienną stwierdzenia nazywamy *funkcjami zdaniowymi*.

Twierdzenie 3.2 (Zasada Indukcji Matematycznej = ZIM)
Niech $T(n)$ będzie zdaniem logicznym dla $n \in \mathbf{N}$. Załóżmy, że:

- **Z1:** zdanie $T(1)$ jest prawdziwe oraz
- **Z2:** dla dowolnego $k \in \mathbf{N}$ zdanie $T(k)$ implikuje $T(k+1)$,

Wtedy dla dowolnego $n \in \mathbf{N}$ zdanie $T(n)$ jest prawdziwe.

Przyjrzyjmy się na chwilę istocie tego twierdzenia. Początkowo mamy zdanie logiczne $T(n)$, ale jeszcze nie wiemy, dla których n jest ono prawdziwe, a dla których fałszywe. ZIM mówi nam, że $T(n)$ jest prawdziwe dla wszystkich $n \in \mathbf{N}$ o ile sprawdzimy założenia **Z1** i **Z2**. Przypomnijmy, że żeby pokazać implikację zakładamy poprzednik implikacji i udowadniamy następnik. I tutaj właśnie kryje się moc indukcji: pokazujemy, że $T(k+1)$ jest prawdziwe zakładając (wiedząc), że zdanie o mniejszym indeksie $T(k)$ jest już prawdziwe (myślimy o konkretnym k i $k+1$). Bez ZIM musielibyśmy bezpośrednio pokazać, że każde ze zdań $T(n)$ jest prawdziwe nie mając dodatkowego założenia.

Dowód ZIM. Skorzystamy z faktu 3.1. Załóżmy, że **Z1** i **Z2** zachodzą i pokażemy, że $T(n)$ jest prawdziwe dla wszystkich $n \in \mathbf{N}$. Skorzystamy z metody dowodu *nie wprost* [2] , czyli **założymy**, że $T(n)$ jest nieprawdziwe dla pewnego (być może wielu) n. Rozważmy następujący podzbiór $\mathbf{N}$:

$$A = \{n \in \mathbf{N} \ : \ T(n) \text{ jest zdaniem fałszywym}\}.$$

Teraz, zgodnie założeniem nie wprost, A nie jest zbiorem pustym, więc z faktu 3.1 musi mieć element najmniejszy. Oznaczymy go przez n_0. Jeśli $n_0 = 1$, to mamy sprzeczność z **Z1**. W przeciwnym wypadku T_{n_0} jest fałszywe, ale T_{n_0-1} jest prawdziwe, więc mamy sprzeczność z **Z2** (dla $k = n_0 - 1$ prawda implikuje fałsz). Dostajemy sprzeczność, więc zdanie: "$T(n)$ jest nieprawdziwe dla pewnego (być może wielu) n" okazało się nieprawdziwe, czyli jego zaprzeczenie: "$T(n)$ jest prawdziwe dla wszystkich $n \in \mathbf{N}$" jest prawdziwe. $\square$

[2]Metoda *nie wprost* polega na tym, że zamiast pokazać, że zdanie ψ jest prawdą, myślimy: co by było, gdyby ψ nie było prawdą. Jeśli okaże się, że zaprzeczenie ψ prowadzi do sprzeczności (jest nieprawdą), to wyjściowe zdanie ψ musiało być prawdą. Metoda *nie wprost* często ułatwia dowody, więc w przyszłości będziemy jej często używali.

ZIM mówi o dowolnych zdaniach logicznych numerowanych liczbami naturalnymi, więc można jej używać właściwie w każdej dziedzinie matematyki. Poniższy przykład jest znanym wzorem na sumę ciągu arytmetycznego: $1, 2, 3, ..., n$.

Przykład 3.3
Dla każdego $n \in \mathbf{N}$ zachodzi:

$$1 + 2 + ... + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{3.1}$$

Wzór (3.1) można udowodnić na wiele sposobów. Tutaj oczywiście pokażemy dowód wykorzystujący ZIM.

Dowód. Niech $T(n)$ dla $n \in \mathbf{N}$ oznacza zdanie z (3.1). Zgodnie z ZIM musimy sprawdzić:

- **Z1:** Tutaj $T(1)$ oznacza po prostu $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$, więc $T(1)$ jest prawdziwe.
- **Z2:** Zakładamy (czyli wiemy), że $T(k)$ jest prawdą dla pewnego $k \in \mathbf{N}$, czyli:

$$1 + 2 + ... + (k-1) + k = \frac{k(k+1)}{2}. \tag{3.2}$$

Teraz pokażemy $T(k+1)$ korzystając z (3.2). Mamy

$$1 + 2 + ... + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

i to jest dokładnie $T(k+1)$. Zauważmy, że w pierwszej równości wykorzystaliśmy założenie (tzw. *założenie indukcyjne*), a dalej już były zwykłe przekształcenia.

Używając ZIM (ponieważ **Z1** i **Z2** są spełnione) wzór (3.1) jest prawdziwy dla każdego $n \in \mathbf{N}$.
□

Przykład 3.4
Dla każdego $n \in \mathbf{N}$ liczba $7^n - 1$ jest podzielna przez 6.

Dowód. Zgodnie z ZIM sprawdzamy:

- **Z1:** dla $n = 1$ liczba $7^1 - 1 = 6$ jest podzielna przez 6,
- **Z2:** zakładamy, że dla $k \in \mathbf{N}$ liczba $7^k - 1$ jest podzielna przez 6, czyli istnieje $K \in \mathbf{N}$, takie że $7^k - 1 = 6K$. Wtedy

$$7^{k+1} - 1 = 7^{k+1} - 7^k + 7^k - 1 = 7^k(7-1) + 6K = 6(7^k + K).$$

Ponieważ ta ostatnia liczba jest podzielna przez 6, to pokazaliśmy implikację z ZIM, więc z ZIM wynika że $6|7^n - 1$ dla wszystkich $n \in \mathbf{N}$[3].

□

Przykład 3.5
Udowodnij, że n prostych, z których żadne dwie nie są równoległe, a żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie, rozcina płaszczyznę na $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ obszarów.

Dowód. Użyjemy ZIM.

- **Z1:** Jedna prosta dzieli płaszczyznę na $2 = \frac{1 \cdot 2}{2} + 1$ obszary.

[3] Zapis $k|n$ dla $k, n \in \mathbf{N}$ oznacza, że k jest dzielnikiem n (lub, równoważnie, n jest wielokrotnością k)

- **Z2:** Załóżmy, że k prostych jak w zadaniu dzieli płaszczyznę na $\frac{k(k+1)}{2}+1$ obszarów. Kolejna, $(k+1)$-sza dorysowana prosta przecina wszystkie pozostałe k prostych (i to poza punktami przecięć tych prostych), zatem przecina $k+1$ obszarów na dwie części, więc liczba obszarów zwiększy się o $k+1$ i będzie wynosiła:

$$\frac{k(k+1)}{2}+1+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}+1.$$

□

ZIM można modyfikować na wiele sposobów. Może się zdarzyć, że $T(n)$ jest nieprawdziwe dla kilku początkowych n, ale od pewnego n_0 podejrzewamy, że jest już prawdziwe.

Uwaga 3.6
Jeśli pokażemy, że:

- **Z1:** $T(n_0)$ jest prawdziwe,
- **Z2:** $T(k) \implies T(k+1)$ dla $k \geq n_0$,

to ZIM dowodzi, że dla każdego $n \geq n_0$ zdanie $T(n)$ jest prawdziwe.

Podobnie, może się zdarzyć, że nie potrafimy pokazać "kroku" $T(k) \implies T(k+1)$, ale umiemy pokazać większy "krok".

Uwaga 3.7
Jeśli $T(n_0)$ jest prawdą, oraz dla pewnego $r \in \mathbf{N}$ mamy implikację $T(k) \implies T(k+r)$ (dla $k \geq n_0$), to ZIM mówi, że prawdziwe są $T(n_0), T(n_0+r), T(n_0+2r), \ldots$. Ogólnie: $T(n_0+nr)$ są prawdziwe dla $n \in \mathbf{N}$.

Przykład 3.8
Dowiedź, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 6$ kwadrat można podzielić na n kwadratów.

Dowód. Niech $T(n)$ będzie zdaniem: "kwadrat można zbudować z n kwadratów". Zauważmy, że kwadrat można zbudować z 6 kwadratów (jeden o boku 2 i 5 o boku 1), 7 kwadratów (3 o boku 2, 4 o boku 1) i 8 kwadratów (jeden o boku 3 i 7 o boku 1). **Z1:** Zatem $T(6), T(7)$ i $T(8)$ są prawdziwe. Ponadto, jeśli mając dany dowolny podział i jeden z kwadratów podzielimy na 4 mniejsze, to w nowym podziale są o 3 więcej kwadraty. **Z2:** To pokazuje, że $T(k) \implies T(k+3)$ dla dowolnego $k \in \mathbf{N}$. Z pokazanych **Z1** i **Z2** zmodyfikowana ZIM dowodzi, że $T(n)$ jest prawdziwe dla $n \geq 6$. □

Przykład 3.9
Dowiedz, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$1000000n < 2^n + 19000000\,.$$

Dowód. Powyższa nierówność jest oczywista dla $n = 1, \ldots, 19$. Dla $n = 20$ nierówność jest spełniona ponieważ $1000000 < 2^{20}$ (bo $2^{10} > 1000$). Korzystając z indukcji (sprawdzonej już dla $n = 19$) pokażemy krok indukcyjny $T(k) \implies T(k+1)$ dla $k \geq 20$. Załóżmy, że $1000000k < 2^k + 19000000$. Wtedy

$$1000000(k+1) = 1000000k + 1000000 < 2^k + 19000000 + 1000000 < 2^{k+1} + 19000000,$$

przy czym ostatnia nierówność jest prawdziwa, bo sprawdziliśmy już, że $1000000 < 2^k$ dla $k \geq 20$. □

3.2. **Lista zadań.**

1. Udowodnij wzory:

(a)
$$1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1,$$

(b)
$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Udowodnij, że:

(a)
$$5|n^5 - n,$$

(b)
$$6|n^3 + 5n.$$

3. Przeprowadź drugi krok indukcyjny w dowodzie wzoru: $n^2 = (n - \frac{1}{2})(n + \frac{1}{2})$. Czy wzór ten jest prawdziwy?

4. Dla $n > 2$ udowodnij nierówność $2^n > 2n + 1$.

5. Udowodnij indukcyjnie, że każdą kwotę n zł ($n \geq 4$) można rozmienić na dwuzłotówki i pięciozłotówki.

6. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, ze prawdziwe sa $T(1)$ i $T(6)$, oraz ze dla dowolnego $n \geq 1$ zachodzi implikacja $T(n) \implies T(n+3)$. Które zdania $T(n)$ są prawdziwe? Czy pozostałe zdania są fałszywe?

---

7. Udowodnij wzory:

(a)
$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

(b)
$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n \cdot n! = (n+1)! - 1,$$

(c)
$$1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + ... + n \cdot 3^{n-1} = \frac{2n-1}{4} \cdot 3^n + \frac{1}{4},$$

(d)
$$(2^{2^0} + 1) \cdot (2^{2^1} + 1) \cdot (2^{2^2} + 2) \cdot (2^{2^3} + 1) \cdot ... \cdot (2^{2^n} + 1) = 2^{2^{n+1}} - 1.$$

8. Oblicz wartość wyrażenia

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

dla $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Następnie zgadnij wzór, który daje wynik dla dowolnego n i udowodnij indukcyjnie, że ten wzór zachodzi dla dowolnego $n \in \mathbf{N}$.

9. Udowodnij następujące nierówności:

(a) dla $n \in \mathbf{N}$,

$$n(n+1) \leq 2^n + 4,$$

(b) dla $n \in \mathbf{N}$,

$$10n < 2^n + 25,$$

(c) dla $x > -1$, $n \in \mathbf{N}$ (nierówność Bernoulliego):

$$(1+x)^n \geq 1 + nx,$$

(d) dla $n > 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n},$$

(e) dla $n > 3$,

$$(n+1)^n < n^{n+1},$$

10. Uzasadnij podzielności:

(a) $19|(5\cdot 2^{3n-2}+3^{3n-1})$,

(b) $133|(11^{n+1}+12^{2n-1})$.

11. Pokaż indukcyjnie, że zbiór, który ma n elementów, ma dokładnie 2^n podzbiorów.

12. Udowodnij przez indukcję, że liczba przekątnych w n-kąta wypukłego jest równa $\frac{1}{2}n(n-3)$

13. Dowiedź, ze dla każdej liczby naturalnej $n \geq 200$ sześcian można podzielić na n sześcianów.

14. Dowiedź, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{60}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2n(n+1)}\ .$$

15. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\ldots+\frac{1}{n^2-1}=\frac{(n-1)(3n+2)}{4n(n+1)}\ .$$

16. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} i^5 < \frac{n^3(n+1)^3}{6} .$$

17. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi

$$9 \cdot (3n)! \cdot n............2 \cdot (3^n \cdot n!)^3 \ .$$

W miejsce kropek wstawić jeden ze znaków: $>, <, =, \geq, \leq$.

18. Ciąg a_n zadany jest rekurencyjnie:

$$a_0 = -1, \quad a_1 = 0, \qquad a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1} \text{ dla } \ n \geq 1.$$

Udowodnij, że $a_n = 2 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n$.

19. Ciąg a_n zadany jest rekurencyjnie:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}.$$

Policz kilka początkowych wyrazów tego ciągu, zgadnij wzór na n-ty wyraz, a następnie udowodnij ten wzór używając indukcji.

20. Liczby a_n, b_n sa określone wzorami

$$a_1 = b_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + b_n, \quad b_{n+1} = a_{n+1} + a_n.$$

Dowiedź, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $2a_n^2 - b_n^2$ jest równa 1.

21. Znajdź błąd w w następującym dowodzie: wykaż, że dla $n \in \mathbf{N}$ zachodzi nierówność

$$30n < 2^n + 110.$$

Dowód. Przeprowadzimy dowód indukcyjny. Dla $n = 1$ sprawdzamy bezpośrednio $30 < 2 + 110 = 112$. Załóżmy, że $30k < 2^k + 110$. Udowodnimy nierówność $30(k+1) < 2^{k+1} + 110$. Stosując założenie indukcyjne otrzymujemy ciąg nierówności:

$$30(k+1) = 30k + 30 < 2^k + 110 + 30 = 2^{k+1} + 110 + 30 - 2^k < 2^{k+1} + 110,$$

przy czym ostatnia nierówność zachodzi dla $k \geq 5$. Zatem nierówność (21) została udowodniona dla $n \geq 5$. Pozostaje sprawdzić, że: dla $n = 2$ mamy $60 < 4+110 = 114$, dla $n = 3$ mamy $90 < 8 + 110 = 118$, dla $n = 4$ mamy $120 < 16 + 110 = 126$. Tym samym nierówność (21) jest udowodniona dla wszystkich W szczególności wykazaliśmy, ze dla $n = 6$ zachodzi nierówność $180 < 174$. Gdzie tkwi błąd w powyższym rozumowaniu? $\square$

22. Wskaż błąd w dowodzie twierdzenia: wszystkie koty są tego samego koloru.

Dowód. Wystarczy wykazać, że w dowolnym zbiorze zawierającym n kotów, gdzie $n \in \mathbf{N}$, wszystkie koty są tego samego koloru.

- **Z1** Warunek początkowy, to sprawdzenie dla $n = 1$. Oczywiście w zbiorze zawierającym tylko jednego kota wszystkie koty są tego samego koloru.

- **Z2:** Załóżmy, że udowodniliśmy twierdzenie dla wszystkich liczb naturalnych od 1 do $n-1$, dowodzimy dla n. Weźmy dowolny zbiór A zawierający n kotów. Pokażemy, że koty ze zbioru A są tego samego koloru. Wrzucając z A pewnego kota X otrzymamy zbiór zawierający $n-1$ kotów - możemy skorzystać z założenia indukcyjnego, żeby stwierdzić, że wszystkie koty w A oprócz X mają ten sam kolor. Ale teraz, wrzucając z A kota Y (innego niż X), wnioskujemy z założenia indukcyjnego, że kot X ma ten sam kolor, co pozostałe koty w A. Wobec tego wszystkie koty w A mają ten sam kolor.

Zatem na mocy zasady indukcji matematycznej wszystkie koty są tego samego koloru.

$\square$

23. Załóżmy, że $x + \frac{1}{x}$ jest liczbą całkowitą. Udowodnij, że $x^n + \frac{1}{x^n}$ jest liczbą całkowitą dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

24. Pokaż, że dla liczb rzeczywistych $x_1, ..., x_n$ zachodzi:

(a) $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$,

(b) $|x_1 + x_2 + ... + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + ...|x_n|$.

25. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe jest $T(1)$, oraz ze dla dowolnego $n \geq 6$ zachodzi implikacja $T(n) \implies T(n+2)$. Czy można stąd wnioskować, że:

(a) prawdziwe jest $T(10)$

(b) prawdziwe jest $T(11)$

(c) prawdziwa jest implikacja $T(7) \implies T(13)$

(d) prawdziwa jest implikacja $T(3) \implies T(1)$

(e) prawdziwa jest implikacja $T(1) \implies T(3)$

26. O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że $T(7)$ jest fałszywe, $T(17)$ jest prawdziwe, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \implies T(n+1)$. Czy stad wynika, że:

(a) $T(5)$ jest fałszywe

(b) $T(10)$ jest prawdziwe

(c) $T(15)$ jest fałszywe

(d) $T(20)$ jest prawdziwe

27. O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(25)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej $n \geq 20$ zachodzi implikacja $T(n) \implies T(n+2)$ oraz dla każdej liczby naturalnej $4 \leq n \leq 30$ zachodzi implikacja $T(n) \implies T(n-3)$. Czy stad wynika, że prawdziwe jest:

(a) $T(37)$

(b) $T(38)$

(c) $T(10)$

(d) $T(11)$

28. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbf{N}$ liczba $(n-1)^2$ jest dzielnikiem liczby $n^n - n^2 + n - 1$.

29. Ciąg Fibbonacciego f_n zadany jest rekurencyjnie: $f_0 = 1, \quad f_1 = 1, \quad f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ dla $n \geq 1$. Udowodnij, że

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

30. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

wedle następującego planu:

(a) udowodnij ją dla $n = 2$,

(b) udowodnij, że jeśli jest ona prawdziwa dla $n = k$, to jest też prawdziwa dla $n = 2k$,

(c) udowodnij, że jeśli $k < \ell$ i nierówność jest prawdziwa dla $n = \ell$ to jest też prawdziwa dla $n = k$,

(d) wywnioskuj tezę z $(a) - (c)$.

31. Dane są klocki o kształcie sześcianu o wymiarach $2 \times 2 \times 2$ z usuniętym narożnikiem $1 \times 1 \times 1$. Używając tych klocków zbuduj sześcian o wymiarach $2^n \times 2^n \times 2^n$ z usuniętym narożnikiem $1 \times 1 \times 1$.

32. Boki pewnego wielokąta wypukłego zaznaczono z zewnątrz cienką kolorową linią. W wielokącie zaznaczono kilka przekątnych i każdą z nich - również z jednej strony - zaznaczono cienką kolorową linią. Wykaż, że wśród wielokątów, na które narysowane przekątne dzielą wyjściowy wielokąt, istnieje taki, którego wszystkie boki są zaznaczone z zewnątrz.

33. Dana jest liczba naturalna k. Dowiedź, że z każdego zbioru liczb całkowitych, mających więcej niż 3^k elementów możemy wybrać $(k+1)$-elementowy podzbiór S o następującej własności:
– dla dowolnych dwóch różnych od siebie podzbiorów $A, B \subset S$ suma wszystkich elementów z A jest rożna od sumy wszystkich elementów z B.

34. Udowodnij, że dla różnych liczb całkowitych a, b, c i dowolnej liczby naturalnej n poniższa liczba jest całkowita:

$$\frac{a^n}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^n}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^n}{(c-a)(c-b)}.$$

35. Niech $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ będzie ciągiem dodatnich liczb rzeczywistych takich, że $a_1 = \frac{1}{2}$ oraz $a_n^2 \leq a_n - a_{n+1}$. Udowodnij, że $a_n < \frac{1}{n}$ dla każdego $n \in \mathbf{N}$.

36. Na pustyni na drodze w kształcie okręgu jest pewna liczba stacji benzynowych, a na każdej pewna ilość paliwa. Wiadomo, że paliwa na wszystkich stacjach łącznie wystarcza do przejechania drogi naokoło. Udowodnij, że istnieje stacja, taka że samochód startujący z tej stacji jadąc w wybraną stronę przejedzie całą drogę naokoło.

4. SYMBOL NEWTONA

4.1. **Wprowadzenie.** Przypomnijmy, że $n!$ oznacza w skrócie iloczyn $1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$ oraz $0! = 1$. Mamy dane dwie liczby: $n \in \mathbf{N}$ oraz $k \in \{0, 1, ..., n\}$. Symbolem Newtona nazywamy liczbę daną wzorem:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \tag{4.1}$$

Jest jasne, że $\binom{n}{k}$ (czytamy: "n nad k") jest zawsze liczbą wymierną. Okazuje się jednak, że są one zawsze naturalne i mają ważne znaczenie w algebrze i kombinatoryce. Zanim jednak to zobaczymy przyjrzymy się własnościom tych liczb. Poniżej mamy wypisane liczby $\binom{n}{k}$ dla $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ i $k \in \{0, ..., n\}$.

$$\begin{array}{llllll}
\binom{0}{0} & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llllll}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}$$

Można łatwo sprawdzić, że zawsze $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ oraz $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$. Ponadto: (prawie) każda z nich jest sumą dwóch "ponad nią". Jest to kluczowa obserwacja, którą później wykorzystamy.

Fakt 4.1
Dla $n \in \mathbf{N}$ oraz $k \in \{1, ..., n\}$ mamy

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}. \tag{4.2}$$

Dowód. Obliczymy prawą stronę równości (4.2).

$$\begin{aligned}
(P) &= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\frac{n}{k(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.
\end{aligned}$$

□

Następujące twierdzenie jest uogólnieniem wzorów skróconego mnożenia: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ w którym symbol Newtona gra kluczową rolę.

Twierdzenie 4.2 (Wzór dwumianowy Newtona)
Dla $a, b \in \mathbf{R}$ oraz $n \in \mathbf{N}$ zachodzi

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \tag{4.3}$$

Dowód. Skorzystamy z ZIM.

- **Z1:** Dla $n = 1$ obie strony są równe $a + b$.

- **Z2:** Załóżmy, że wzór zachodzi dla wszystkich $a, b \in \mathbf{R}$ i pewnego n.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\cdot(a+b)^n = (a+b)\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} = (\clubsuit).$$

Teraz wystarczy uważnie przyjrzeć się wyrażeniom występującym w oby sumach. Przy wyrażeniu $a^j b^{n+1-j}$ (dla $j \in \{1, ..., n\}$) w pierwszej sumie mamy współczynnik $\binom{n}{j-1}$ a w drugiej $\binom{n}{j}$. Poza tym, z w pierwszej sumie jest jeszcze składnik a^{n+1} a w drugiej b^{n+1}. Korzystając z (4.2) otrzymujemy:

$$(\clubsuit) = \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\left(\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j}\right)a^j b^{n+1-j} + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}a^j b^{n+1-j},$$

co chcieliśmy otrzymać.

□

Dla kilku pierwszych n wzór (4.3) wygląda następująco:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2, \quad (a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3, \quad (a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

Kolejne twierdzenie pokazuje, że symbol Newtona ma również naturalne znaczenie kombinatoryczne. W przyszłości będziemy czasem wykorzystywać ten dualizm zmieniając problemy algebraiczne na kombinatoryczne i odwrotnie.

Twierdzenie 4.3

Niech zbiór X ma dokładnie n elementów. Dla $k \in \{0, 1, ..., n\}$ liczba podzbiorów zbioru X mających dokładnie k elementów wynosi $\binom{n}{k}$.

Dowód. Twierdzenie 4.3 można wyprowadzić z twierdzenia 4.2 i to będzie treścią problemu 22. Tutaj podamy bezpośredni dowód indukcyjny (po zmiennej n)[4].

- **Z1:** Dla $n = 1$ są dwie możliwości: jest jeden podzbiór jednoelementowy i jeden podzbiór pusty. Równocześnie $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$.
- **Z2:** Zakładamy, że dla pewnego $n \in \mathbf{N}$ i **wszystkich** $k \in \{0, ..., n\}$ twierdzenie zachodzi. Rozważamy podzbiory j elementowe zbioru $n+1$ elementowego (dla $j \in \{0, ..., n+1\}$). Gdy $j = 0$ lub $j = n+1$ mamy jeden podzbiór i twierdzenie się zgadza. Rozważmy $j \in \{1, ..., n\}$. Wybierzmy jeden ustalony element x zbioru X na bok. Policzymy podzbiory j-elementowe zbioru X dzieląc je na dwie (rozłączne) części: zawierające x i nie zawierające x. Tych pierwszych jest $\binom{n}{j-1}$ (bo z pozostałych n elementów dobieramy do x dokładnie $j-1$), a tych drugich $\binom{n}{j}$ (skoro x nie należy do podzbioru, to z pozostałych n wybieramy dokładnie j). Zgodnie ze wzorem (4.2) suma tych dwóch liczb wynosi $\binom{n+1}{j}$, co mieliśmy udowodnić.

□

Zauważmy, że z twierdzenia 4.3 wynika, że wszystkie liczby $\binom{n}{k}$ są całkowite, co nie było wcale jasne z definicji (4.1). Można to jednak pokazać bezpośrednio, zobacz problem 23.

[4] W tym twierdzeniu występują dwie zmienne n i k. Przeprowadzając dowód indukcyjny po zmiennej n mamy na myśli zdania $T(n)$: "twierdzenie zachodzi dla n i wszystkich możliwych k".

4.1.1. *Uwagi.*

Uwaga 4.4
Niech $n, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $k \leq n$. Wtedy:

1.
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

2. dla $0 \leq k_1 < k_2 \leq [n/2]$ zachodzi
$$\binom{n}{k_1} < \binom{n}{k_2}.$$

Dowód. Wzór **1.** wynika wprost z definicji (4.1) (sprawdź). Alternatywnie, z twierdzenia 4.3, możemy go uzasadnić następująco: gdy zbiór X ma n elementów, to jest tyle samo podzbiorów k-elementowych i $n-k$ elementowych ponieważ każdemu zbiorowi k-elementowemu odpowiada dokładnie jedno $n-k$-elementowe dopełnienie.

Aby udowodnić **2.** wystarczy pokazać, że $\binom{n}{k-1} < \binom{n}{k}$ dla $1 \leq k \leq [n/2]$ (zauważ, że to wystarczy). Wystarczy sprawdzić, że
$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} < \frac{n!}{k!(n-k)!},$$
co po uproszczeniu sprowadza się do
$$k < n - k + 1,$$
a to jest prawdziwe dla powyższych k. □

4.1.2. *Przykłady.* Jako wprowadzenie do metod kombinatorycznych wykorzystywanych w algebrze podamy teraz inny dowód faktu 4.1.

Dowód. Niech X będzie ustalonym zbiorem n-elementowym. Lewą stronę (4.2) możemy interpretować jako liczbę podzbiorów k-elementowych zbioru X. Policzmy tę liczbę inaczej: ustalmy element $x \in X$ i policzmy zbiory zawierające x oraz nie zawierające X, które mają k elementów. Pierwszych jest $\binom{n-1}{k-1}$ a drugich $\binom{n-1}{k}$, co po dodaniu daje prawą stronę (4.2). □

Przykład 4.5
Dla $n, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $k \leq n$, zachodzi
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Dowód. Powyższy wzór udowodnimy przez znalezienie interpretacji kombinatorycznej, która odczytana na dwa sposoby da obie strony równania. Zauważmy najpierw, że
$$\binom{n}{k}^2 = \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k}.$$
Załóżmy, że mamy zbiór X, który ma $2n$ elementów. Prawa strona to oczywiście liczba wyborów połowy elementów ze zbioru X. Podzielmy zbiór X na dwa równoliczne zbiory X_1 i X_2. Żeby wybrać n elementów ze zbioru X wybieramy k elementów ze zbioru X_1 oraz $n-k$ ze zbioru X_2. Postępując tak dla $k = 0, 1, ..., n$ dostajemy wszystkie wybory n elementów z X (sprawdź, że to wszystkie i każdy uwzględniliśmy). □

4.2. **Lista zadań.**

1. Oblicz ile jest podzbiorów 4-elementowych zbioru 6-elementowego.
2. Policz potęgi: $(x+1)^2$, $(x+1)^3$, $(x+1)^4$, $(x+1)^5$.
3. Policz ile jest podzbiorów $0, 1, 2, 3, 4$-elementowych zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$.
4. Znajdź wyraz rozwinięcia dwumianu $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{2}{x}\right)^{12}$ w którym nie występuje x.
5. Wyznacz współczynnik przy x^7 w wielomianie $(5-2x)^{10}$.
6. Uporządkuj rosnąco następujące liczby:

$$\binom{100}{7},\quad \binom{100}{27},\quad \binom{100}{47},\quad \binom{100}{57},\quad \binom{100}{77},\quad \binom{100}{97}.$$

---

7. Znajdź te wyrazy rozwinięcia dwumianu $(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2})^5$, które są liczbami naturalnymi.
8. Rozwiąż równanie $\binom{n}{2} = 66$.
9. Uzasadnij (można to zrobić na co najmniej trzy sposoby), że

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

10. Policz sumy:
(a)

$$\binom{n}{0} \cdot 2^0 + \binom{n}{1} \cdot 2^1 + \binom{n}{2} \cdot 2^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot 2^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot 2^n,$$

(b)

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n}$$

11. Wyznacz liczby całkowite n, m, wiedząc że $m - n\sqrt{3} = (3-\sqrt{3})^5$.
12. Dowiedź, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi nierówność $\binom{2n}{n} < 4^n$.
Wskazówka: $(1+1)^{2n}$
13. Wskaż taką liczbę x, że dla dowolnych liczb naturalnych n i k prawdziwa jest równość

$$\binom{n}{k} + x\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} = \binom{n+2}{k+2}.$$

14. Rozwiąż równanie

$$3 \cdot \binom{n}{4} = \binom{k}{2}$$

w liczbach naturalnych $n \geq 4$, $k \geq 2$.
15. Dowiedz, że dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych a, b, c zachodzi równość

$$\binom{a+b+c}{a}\binom{b+c}{b} = \binom{a+b+c}{b}\binom{a+c}{a}.$$

16. Dowiedz, że dla każdego $n \geq 2$ zachodzi równość

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \ldots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}.$$

17. Dowiedz, że dla każdego $n \geq 2$ zachodzi równość

$$\binom{2}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \ldots \cdot \binom{n}{2} = \frac{n \cdot [(n-1)!]^2}{2^{n-1}}.$$

18. Dowiedz, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\binom{3n}{n} < 7^n$.

19. Dowiedz, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\binom{2n+3}{n} < \frac{3}{2} \cdot 4^n$.

20. Dowiedz, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+4}{n} < 2^{2n+1}.$$

21. Czy równość $2 \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$ jest prawdziwa dla

a) $n = 8, \ k = 2$ **b)** $n = 10, \ k = 3$ **c)** $n = 15, \ k = 4$ **d)** $n = 17, \ k = 5$

---

22. Korzystając z prawa mnożenia nawiasów "każdy z każdym" wywnioskuj ze wzoru (4.3), że współczynnik przy $a^k b^{n-k}$ w wyrażeniu $(a+b)^n$ musi wynosić dokładnie tyle co liczba podzbiorów k-elementowych zbioru n-elementowego.

23. Niech $n, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $k \leq n$ oraz p będzie liczbą pierwszą. Policz przez jaką maksymalną potęgę liczby pierwszej p dzieli się $n!$. Zrób to samo dla k i $n-k$ zamiast n. Wywnioskuj z tego, że $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ jest liczbą całkowitą (bez odwoływania się do interpretacji kombinatorycznej).

24. Dowiedź, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$16^n \cdot \binom{4n}{2n} < 27^n \cdot \binom{4n}{n}.$$

25. Przy odpowiednich założeniach na n, k (takich, że wszystkie symbole istnieją), udowodnij wzory:

(a)
$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1},$$

(b)
$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k},$$

(c)
$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1},$$

(d)
$$\sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}\binom{n+k}{k} = \frac{1}{2}2^{2n+1} = 4^n,$$

(e)
$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k},$$

(f)
$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1},$$

(g)
$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2},$$

(h)

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2},$$

(i)

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{2n-k}{n} = 4^n,$$

26. Dowiedź, że istnieje taka liczba całkowita, $n > 2003$, że w ciągu:

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, ..., \binom{n}{2003},$$

każdy wyraz jest dzielnikiem wszystkich wyrazów po nim następujących.

5. PODZIELNOŚĆ LICZB CAŁKOWITYCH, CZĘŚĆ 1

5.1. **Wprowadzenie.**

5.1.1. *Twierdzenie o dzieleniu z resztą.* W zbiorze liczb całkowitych działania: dodawania, odejmowania i mnożenia są zawsze określone, natomiast z dzieleniem nie jest tak prosto. Dla dwóch liczb całkowitych n, k mówimy, że k jest dzielnikiem n (lub n jest wielokrotnością k) jeśli istnieje liczba całkowita q taka, że $n = q \cdot k$. Zapisujemy to

$$k|n$$

co czytamy "k dzieli n". Często jednak iloraz dwóch liczb całkowitych nie jest liczbą całkowitą, ale możemy zawsze znaleźć wynik dzielenia i resztę, co precyzuje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.1 (Dzielenie z resztą)
Dla liczb $n \in \mathbf{Z}$ i $k \in \mathbf{N}$ istnieją $q \in \mathbf{Z}$ (wynik dzielenia) i $r \in \{0, 1, ..., k-1\}$ (reszta), takie że

$$n = q \cdot k + r.$$

Dowód. Niech q będzie największą liczbą całkowitą, dla której zachodzi

$$k \cdot q \leq n.$$

Zauważmy, że taka największa liczba istnieje (dlaczego?). Zdefiniujmy

$$r = n - k \cdot q.$$

Z definicji wynika, że $q \in \mathbf{Z}$, $r \in \mathbf{N}$ oraz $n = q \cdot k + r$. Pozostaje pokazać, że $r \leq k - 1$. Gdyby $r \geq k$, to

$$0 \leq r - k = n - (k+1)q.$$

Jednak to przeczy maksymalności wyboru k, więc tak być nie może i $r \leq k - 1$[5]. □

Dla przykładu $5000 = 7 \cdot 714 + 2$, czyli dzieląc 5000 przez 7 otrzymujemy wynik 714 i resztę 2. Czasem zdarza się, że nie interesuje nas wynik, a jedynie reszta z dzielenia. W naszym przykładzie możemy pomyśleć tak:

$$5000 = 50 \cdot 100 = (49+1)(98+2) = 7 \cdot n + 2,$$

gdzie n jest pewną liczbą naturalną, gdyż zarówno 49 jak i 98 są podzielne przez 7. W tego typu sytuacjach możemy użyć zapisu kongruencji, który w tym wypadku wyglądałby tak:

$$(49+1)(98+2) \equiv 1 \cdot 2 \equiv 2 \pmod 7$$

5.1.2. *Kongruencje.* Kongruencje wykorzystujemy, gdy mamy liczby całkowite, ale nie interesuje nas dokładna wartość liczby całkowitej, ale reszta z dzielenia przez jakąś konkretną ustaloną liczbę. Zapis

$$n \equiv m \pmod k$$

oznacza dokładnie że

$$k|(n-m),$$

czyli k jest dzielnikiem liczby $n - m$ lub, równoważnie, reszta z dzielenia liczb n i m przez k jest taka sama. Czytamy: "n przystaje do m modulo k". Na przykład

$$50 \equiv 36 \equiv 8 \pmod{14}.$$

Użyteczność kongruencji opiera się w sporej mierze na następującym fakcie.

[5]To jest tzw. "dowód nie wprost"

Twierdzenie 5.2 (Własności kongruencji)
Niech n będzie liczbą naturalną oraz:

$$a \equiv b \pmod{k},$$
$$c \equiv d \pmod{k}.$$

Wtedy:

$$a \pm c \equiv b \pm d \pmod{k},$$
$$ac \equiv bd \pmod{k},$$
$$a^n \equiv b^n \pmod{k}.$$

Innymi słowy kongruencje można dodawać, odejmować, mnożyć i potęgować pod warunkiem, że liczymy "modulo" to samo k.

Przykład 5.3
Znajdź cyfrę jedności liczby 7^{102}.

Rozwiązanie. Mamy

$$7^2 \equiv -1 \pmod{10},$$

a więc

$$(7^2)^{51} \equiv (-1)^{51} = -1 \pmod{10}.$$

Szukaną resztą jest zatem 9. □

5.1.3. *Jeszcze trochę faktów.* W tym podrozdziale podamy kilka przydatnych faktów.

Twierdzenie 5.4
Jeśli dwie liczby a, b są podzielne przez k, to również $a-b, a+b, 2a+3b, ...$ (ogólnie $ma+nb$ dla $m, n \in \mathbf{Z}$) są podzielne przez k.
Jeśli dwie liczby dają tę samą resztę z dzielenia przez k, to ich różnica jest podzielna przez k.

Dowód powyższego faktu pozostawiamy jako proste ćwiczenie. Zamiast tego zobaczmy zastosowanie.

Przykład 5.5
Dane sa takie liczby całkowite k, l, ze liczba $k+2l$ jest podzielna przez 3. Wykaz, że liczba $2k+l$ też jest podzielna przez 3.

Rozwiązanie. Mamy $3|3k+3l$ oraz $3|k+2l$, więc również

$$3|(3k+3l)-(k+2l) = 2k+l.$$

□

Przypomnijmy przy okazji zapis, który będzie używany w zadaniach:

$$\overline{c_n c_n \dots c_2 c_1 c_0} = 10^n \cdot c_n + 10^{n-1} \cdot c_{n-1} + \dots + 10^2 \cdot c_2 + 10 \cdot c_1 + c_0.$$

Fakt 5.6
Liczba $\overline{c_n c_{n-1} ... c_1 c_0}$ dzieli się przez 11 $\Leftrightarrow$ $c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \dots \pm c_n$ dzieli się przez 11 (*naprzemienna suma*).

Dowód. Zauważmy, że

$$10^n \equiv \begin{cases} -1, & \text{if } 2 \nmid n \\ 1, & \text{if } 2|n. \end{cases} \pmod{11},$$

ponieważ $10 \equiv -1 \pmod{11}$. Zatem

$$\overline{c_n c_{n-1} ... c_1 c_0} \equiv c_0 - c_1 + c_2 - ... \pm c_n \pmod{11}.$$

□

5.2. **Lista zadań.**

1. Znajdź resztę z dzielenia przez 7 liczb: $145 \cdot 19$, $84500 \cdot 497888$.

2. Przez co trzeba podzielić 50, żeby otrzymać resztę 5? Znajdź wszystkie możliwości.

3. Udowodnij, że liczba $n^2 - n$ jest parzysta dla dowolnego $n \in \mathbf{Z}$.

4. Uzasadnij, że jeżeli m i n są liczbami całkowitymi niepodzielnymi przez 3, to jedna z liczb $mn + 1$, $m - n$ jest podzielna przez 3.

5. Uzasadnij, że liczba $321^{654} + 123^{456}$ jest podzielna przez 10.

6. Dane sa takie liczby całkowite k, l, że liczba $3k + 4l$ jest podzielna przez 7. Wykaz, ze liczba $4k + 3l$ też jest podzielna przez 7.

7. Znajdź cyfrę jedności sumy

$$1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + 5^5 + 6^6 + 7^7 + 8^8 + 9^9 + 10^{10}.$$

8. Znajdź resztę z dzielenia liczby 2^{1000} przy dzieleniu przez: $3, 4, 5, 6$ oraz 7.

9. Udowodnij, że liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez 6 dla dowolnego $n \in \mathbf{Z}$.

10. Jakie są możliwe reszty z dzielenia kwadratów liczb całkowitych przy dzieleniu przez 3 i 8?

11. Jakie są możliwe reszty z dzielenia sześcianów liczb całkowitych przy dzieleniu przez 8?

12. Jakie wspólne dzielniki mogą mieć liczby n i $n + 6$, jeśli n jest liczbą naturalną?

13. Uzasadnij, że jeśli n jest liczbą całkowitą, to liczba $n \cdot (n + 3)$ jest podzielna przez 9 lub nie jest podzielna przez 3.

14. Udowodnij, że liczba b jest podzielna przez a wtedy i tylko wtedy, gdy b daje resztę 0 przy dzieleniu przez a.[6]

15. Dane sa takie liczby całkowite k, l, m, że liczba $2k + 3l + 4m$ jest podzielna przez 5. Wykaz, ze liczba $k + 2m + 4l$ też jest podzielna przez 5.

16. Mamy daną kongruencję $a \equiv b \pmod{c}$ i załóżmy, że liczby a i b dzielą się przez liczbę całkowitą d. Czy można stąd wywnioskować, że $a/d \equiv b/d \pmod{c}$?

17. Mamy daną kongruencję $a \equiv b \pmod{c}$ i załóżmy, że liczby a, b i c dzielą się przez liczbę całkowitą d. Czy można stąd wywnioskować, że $a/d \equiv b/d \pmod{c/d}$?

18. Udowodnij, że równanie

$$a^2 + b^2 = 100003$$

nie ma rozwiązań całkowitych.

[6]Pewnie wydaje Ci się to oczywiste. Spróbuj zrozumieć intencje patrząc na definicję podzielności i twierdzenie o dzieleniu z resztą.

19. Znajdź dziesięć kolejnych nieparzystych liczb naturalnych, których suma jest podzielna przez 99.

---

20. Dla jakich n wyrażenie $\frac{3n}{2n-1}$ jest liczbą całkowitą?

21. Znajdź najmniejszą liczbę naturalną podzielną przez 111, której suma cyfr jest równa 111.

22. Znajdź wszystkie liczby dwucyfrowe podzielne przez iloczyn swoich cyfr.

23. Znajdź liczbę trzycyfrową, która jest 7 razy większa od liczby powstałej z niej poprzez wykreślenie środkowej cyfry.

24. Znajdź wszystkie liczby trzycyfrowe, które przy dowolnym przestawieniu ich cyfr dają liczbą podzielną przez 27

25. Znajdź wszystkie liczby trzycyfrowe $\overline{abc}$, których kwadrat kończy się cyframi $\overline{abc}$.

26. Udowodnij, że liczba czterocyfrowa, której cyfra tysięcy jest równa cyfrze dziesiątek, a cyfra setek jest równa cyfrze jedności, nie może być kwadratem liczby naturalnej.

27. Znajdź liczbę czterocyfrową, która jest cztery razy mniejsza od liczby zapisanej wspak.

28. Znajdź wszystkie liczby trzycyfrowe, które są 11 razy większe od sumy woich cyfr.

---

6. PODZIELNOŚĆ LICZB CAŁKOWITYCH, CZĘŚĆ 2

6.1. **Wprowadzenie.**

6.1.1. *Jednoznaczność rozkładu.* Zanim przejdziemy do głównego twierdzenie przypomnijmy znany fakt.

Lemat 6.1
Jeśli p jest liczbą pierwszą oraz $a_1, ..., a_n \in \mathbf{Z}$, to

$$p | a_1 \cdot ... \cdot a_n \quad \Longrightarrow \quad p | a_i \text{ dla pewnego } i \in \{1, ..., n\}.$$

Dowód powyższego faktu nie jest bardzo łatwy i w tym momencie go pominiemy.

Twierdzenie 6.2 (Jednoznaczność rozkładu)
Każda liczba naturalna rozkłada się jednoznacznie na iloczyn liczb pierwszych.

Dowód. W pierwszej części dowodu uzasadnimy, że każda liczba rozkłada się na iloczyn liczb pierwszych. Załóżmy przez indukcję, że dane jest n i dla każdej liczby mniejszej od n możemy rozłożyć liczbę na iloczyn liczb pierwszych (sprawdzenie kroku początkowego zostawiamy czytelnikowi). Jeśli n jest liczbą pierwszą, to koniec. Jeśli nie jest, to $n = n_1 \cdot n_2$ i obie liczby n_1 i n_2 rozkładają się na iloczyn liczb pierwszych. Z tego również n jest iloczynem liczb pierwszych.

W drugiej części pokażemy, że zachodzi jednoznaczność, tzn. zapisując

$$n = p_1^{a_1} \cdot ... \cdot p_k^{a_k}$$

oraz

$$n = q_1^{b_1} \cdot ... \cdot q_l^{b_l}$$

dla liczb pierwszych p_i, q_i oraz liczb naturalnych l, k, a_i, b_i te zapisy różnią się jedynie kolejnością mnożenia. Znów skorzystamy z indukcji. Skoro $p_1 | n$, to $p_1 = q_j$ dla pewnego j (lemat 6.1). Liczba n/p_1 jest mniejsza od n i dla niej zachodzi jednoznaczność rozkładu. Z tego znioskujemy, że dla n również. □

Jako wniosek wiemy, że jeśli rozłożymy liczbę jako iloczyn liczb pierwszych do pewnych potęg (np. $2^5 \cdot 3^2 \cdot 13$), to podzielność przez tę liczbę oznacza dokładnie podzielność przez poszczególne liczby pierwsze w odpowiednich potęgach. W naszym przykładzie:

$$2^5 \cdot 3^2 \cdot 13 | n \quad \Longleftrightarrow \quad 2^5 | n \ i \ 3^2 | n \ i \ 13 | n.$$

6.1.2. *Algorytm Euklidesa.* Algorytm Euklidesa pozwala szybko znajdować największy wspólny dzielnik liczb $\mathrm{NWD}(a, b)$ (największy wspólny dzielnik).

Mając dane dwie liczby a i b dzielimy z resztą większą przez mniejszą. Następnie wyjściową parę liczb zastępujemy tą mniejszą (b) i resztą z dzielenia r (która jest mniejsza od b). Tak dostajemy parę b, r, z którą postępujemy podobnie, aż dostaniemy 0 jako resztę. Wtedy druga z tych liczb jest NWD wszystkich tych par.

Uzasadnijmy teraz, że $\mathrm{NWD}(a, b) = \mathrm{NWD}(b, r)$. Z algorytmu dzielenia z resztą mamy

$$a = b \cdot q + r.$$

Ponieważ liczba $\mathrm{NWD}(a, b)$ jest dzielnikiem a oraz b, to z powyższej równości $\mathrm{NWD}(a, b) | r$, więc $\mathrm{NWD}(a, b) | \mathrm{NWD}(b, r)$. Odwrotnie, ponieważ $\mathrm{NWD}(b, r)$ jest dzielnikiem b i r, to z powyższej równości $\mathrm{NWD}(b, r)$ dzieli również a. Zatem $\mathrm{NWD}(b, r) | \mathrm{NWD}(a, b)$, więc $\mathrm{NWD}(b, r) = \mathrm{NWD}(a, b)$.

Twierdzenie 6.3 (Uogólniony algorytm Euklidesa)
Niech $a, b \in \mathbb{Z}$. Wtedy istnieją $k, n \in \mathbb{Z}$ takie, że

$$a \cdot k + b \cdot n = \mathrm{NWD}(a, b).$$

Dowód. Bez straty ogólności możemy udowodnić twierdzenie dla liczb względnie pierwszych a, b (uzasadnij dlaczego!). Z agorytmu Euklidesa mamy

$$a = q_1 \cdot b + r_1$$

$$b = q_2 \cdot r_1 + r_2$$

$$...$$

$$r_{k-2} = q_{k-1} \cdot r_{k-1} + r_k$$

$$r_{k-1} = q_k \cdot r_k + 1$$

Teraz możemy zauważyć, że z powyższych równań można wyznaczyć wszystkie r_j jako pewne sumy typu $x \cdot a + y \cdot b$ dla $x, y \in \mathbb{Z}$. Używając tego w ostatnim równaniu dostajemy tezę. □

6.1.3. *Liczba dzielników i ich suma.*

6.1.4. *Małe twierdzenie Fermata.*

Twierdzenie 6.4 (Małe twierdzenie Fermata)
Jeśli p jest liczbą pierwszą oraz $a \in \mathbb{Z}$ jest takie, że $p \nmid a$, to

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Dowód. Pozważmy reszty z dzienia przez p (z wyjątkiem zera):

$$1, 2, ..., p-1.$$

Wszystkie te reszty mnożymy przez liczbę a i sprawdzamy resztę mod p:

$$a \pmod{p}, 2a \pmod{p}, ..., (p-1)a \pmod{p}.$$

Zauważymy teraz, że powyższe $p-1$ reszt to znów wszystkie reszty z dzielenia przez p (poza zerem); być może w innej kolejności. Załóżmy więc teraz, że $j \cdot a$ oraz $k \cdot a$ dają tę samą resztę z dzielenia przez p. Wtedy $p | (j-k) \cdot a$, ale $p \nmid a$ oraz $p \nmid (j-k)$ (bo j i k są różne i mniejsze od p). Otrzymana sprzeczność dowodzi, że żadne dwie z tych reszt nie są takie same. Oczywiście żadna nie może być zerem, więc to te same reszty. Mnożąc te dwa ciągi mamy

$$(p-1)! \equiv a^{p-1}(p-1)! \pmod{p}.$$

Ponieważ $(p-1)!$ jest względnie pierwsze z p, to możemy skrócić kongruencję i mamy

$$1 \equiv a^{p-1} \pmod{p}.$$

□

6.1.5. *Twierdzenie Eulera.* Pewnym uogólnieniem twierdzenia Fermata jest twierdzenie Eulera, w którym p nie musi być liczbą pierwszą. Aby sformułować twierdzenie Eulera wprowadzamy funkcję $\phi(n)$, która dla danej liczby naturalnej n podaje liczbę liczb względnie pierwszych z n ze zbioru $\{1, ..., n-1\}$. Np. $\phi(p) = p - 1$ dla liczby pierwszej p oraz $\phi(12) = 4$ (bo względnie pierwsze z liczbą 12 są: 1,5,7,11).

Twierdzenie 6.5 (Twierdzenie Eulera)
Jeśli $n \in \mathbb{N}$ oraz $a \in \mathbb{Z}$ są takie, że $\mathrm{NWD}(a, n) = 1$, to

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Dowód twierdzenia Eulera można przeprowadzić podobnie do dowodu twierdzenia Fermata i zostawiamy to jako ćwiczenie.

6.1.6. *Twierdzenie Wilsona.*

Twierdzenie 6.6 (Twierdzenie Wilsona)
Jeśli p jest liczbą pierwszą, to

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

6.1.7. *Chińskie twierdzenie o resztach.*

Twierdzenie 6.7
Jeśli mamy dane parami względnie pierwsze liczby $d_1, d_2, ..., d_k$ oraz dowolne całkowite $r_1, r_2, ..., r_k$, to układ:

$$\begin{cases} x \equiv r_1 \ (mod\ d_1) \\ x \equiv r_2 \ (mod\ d_2) \\ \qquad ... \\ x \equiv r_k \ (mod\ d_k) \end{cases}$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań. Wszystkie one są postaci

$$x = u + D \cdot n,$$

gdzie $D = d_1 \cdot d_2 \cdot ... \cdot d_k$, $u \in \{0, 1, 2, ..., D-1\}$, a n jest dowolną liczbą całkowitą.

6.2. **Lista zadań.**

---

1. Przetestuj algorytm dla par liczb: $(197, 32)$, $(240, 36)$, $(15411, 110)$.

2. Dlaczego w algorytmie Euklidesa dochodzimy zawsze do pary $(\mathrm{NWD}(a, b), 0)$?

3. Czy liczbę 1100 można przedstawić w postaci iloczynu dwóch liczb, których największy wspólny dzielnik wynosi 11?

4. Iloczyn dwóch liczb całkowitych niepodzielnych przez 6 jest równy 144. Znajdź te liczby.

5. Oblicz: 3^{31} $(mod\ 7)$, 29^{25} $(mod\ 11)$, 128^{129} $(mod\ 17)$.

---

6. Jaki dzień tygodnia będzie za $10^{10^{100}}$ dni?

7. Dla $p = 2, 3, 5, 7, 11$ uzasadnij, że jeśli liczba pierwsza p dzieli iloczyn $a \cdot b$, to $p|a$ lub $p|b$.

8. Znajdź liczby całkowite k, l, m, dla których

$$6^k \cdot 10^l \cdot 15^m = 9^{2000}$$

9. Znajdź wszystkie liczby całkowite x takie, że $x^{86} \equiv 6 \ (mod\ 29)$.

10. Oblicz resztę z dzielenia liczby $2^{44} - 3^{85} + 5^{211}$ przez 43.

11. Wykazac, ze dla kazdego $k \in \mathbb{N}$ liczba $k^6 - k^2$ jest podzielna przez 60.

12. Niech $k = 2008^2 + 2^{2008}$. Jaka jest cyfra jedności liczby $k^2 + 2^k$?

13. Ile dzielników naturalnych mają liczby: 78, 128, 12^{10}, $2^5 \cdot 3^2 \cdot 13$?

14. Pewna liczba n spełnia $n^5 = 133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5$. Znajdź n sprawdzając jaką resztę raje n przy dzielniu przez 3 i 5.

15. Pokaż, że $x^p \equiv x \ (mod\ p)$ dla $x \in \mathbb{Z}$ i liczby pierwszej p.

16. Udowodnij poprzednie zadananie (Małe Tw. Fermata) przez indukcję względem p. *Wskazówka:* $p|\binom{p}{k}$ dla $k = 1, 2, ..., p-1$.

17. Jakie liczby x spełniają układ kongruencji:

(a) $x \equiv 1 \ (mod\ 2), \quad x \equiv 2 \ (mod\ 3)$,

(b) $x \equiv 1 \ (mod\ 2), \quad x \equiv 4 \ (mod\ 8)$,

(c) $x \equiv 5 \ (mod\ 6), \quad x \equiv 4 \ (mod\ 9)$,

(d) $x \equiv 1 \ (mod\ 2), \quad x \equiv 2 \ (mod\ 3), \quad x \equiv 3 \ (mod\ 5)$,

(e) $x \equiv 3 \ (mod\ 7), \quad x \equiv 5 \ (mod\ 11)$,

(f) $x \equiv 5 \ (mod\ 9), \quad x \equiv 3 \ (mod\ 8)$.

18. Udowodnij, że $x \equiv 5 \ (mod\ 6) \ \Leftrightarrow \ x \equiv 1 \ (mod\ 2) \ i \ x \equiv 2 \ (mod\ 3)$.

19. Jakim (prostszym) kongruencjom jest równoważne przystawanie:

(a) $x \equiv 17 \ (mod\ 30)$,

(b) $x \equiv 31 \ (mod\ 70)$,

(c) $x \equiv 13 \ (mod\ 20)$,

(d) $x \equiv 7 \ (mod\ 8)$.

20. Znajdź jakiekolwiek, całkowite rozwiązanie (x, y) równania:

(a) $7x + 2y = 1$,

(b) $5x + 18y = 1$,

(c) $22x + 18y = 1$,

(d) $11x + 17y = 1$,

(e) $35x + 84y = 1$,

(f) $33x + 47y = 1$.

---

21. Niech $p \neq 2$ bedzie liczbą pierwszą. Dowieść, że liczba $1^p + 2^p + 3^p + ... + (p-2)^p + (p-1)^p$ jest podzielna przez p.

22. Niech p bedzie nieparzystą liczbą pierwszą. Obliczyć resztę z dzielenia liczby $1^p - 2^p + 3^p - ... + (p-2)^p - (p-1)^p$ przez p.

23. Niech p bedzie liczba pierwsza i niech $n = p^2 - 3p + 3$. Wykazac, ze liczba $2^n - n + 1$ jest podzielna przez p.

24. Niech $f(x) = x^{x^{x^x}}$. Znajdź dwie ostatnie cyfry liczby $f(17) + f(18) + f(19) + f(20)$.

25. Niech p bedzie nieparzysta liczba pierwsza i niech $k > 1$ bedzie dzielnikiem pierwszym liczby $p^2 - 2$. Dowieść, że istnieje taka liczba całkowita m, ze liczba $m - 14$ jest podzielna przez p oraz liczba $m - 2004$ jest podzielna przez k.

26. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których liczba $n^{n^3} - n^n$ nie jest podzielna przez 5.

27. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnić podzielność liczby $n^{n^7} - n^n$ przez 43.

7. PODZIELNOŚĆ LICZB CAŁKOWITYCH, CZĘŚĆ 3

7.1. **Wprowadzenie.** W tym rozdziale znajdują się dodatkowe zadania dla osó zainteresowanych teorią liczb. Przy rozwiązywaniu może się przydać częsc metod i teorii z poprzednich rozdziałów. Powodzenia!

7.2. **Lista zadań.**

---

1. Iloma jednakowymi cyframi może kończyć się kwadrat liczby naturalnej?

2. Wykaż, że dla każdego n istnieje n-cyfrowy kwadrat liczby naturalnej, którego cyfry tworzą ciąg niemalejący.

3. Dla jakich liczb naturalnych n liczba $\sqrt[3]{n}$ powstaje przez skreślenie trzech ostatnich cyfr liczby n ?

4. Czy przez skreślenie pewnej ilości ostatnich cyfr liczby n możemy otrzymać liczbę $\sqrt{n}$?

5. Dla jakich cyfr c może się zdarzyć, że pewna liczba $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ jest postaci $\overline{cc \ldots ccc}$ i większa od 10 ?

6. Udowodnij, że dowolna wielokrotność liczby $\underbrace{\overline{11 \ldots 111}}_{n}$ ma sumę cyfr co najmniej n.

7. Dla jakich cyfr x, y, z liczba $\overline{xy234z}$ dzieli się przez 396 ? Znajdź wszystkie możliwości.

8. Oblicz sumę cyfr liczby $9 \cdot 99 \cdot 9999 \cdot 99999999 \cdot \ldots \cdot \underbrace{\overline{99 \ldots 999}}_{2^{1024}} \cdot \underbrace{\overline{99 \ldots 999}}_{2^{2048}}$.

9. Liczba naturalna b powstała przez zmianę kolejności cyfr liczby naturalnej a. Załóżmy, że $a + b = \underbrace{\overline{99 \ldots 999}}_{n}$. Dla jakich n jest to możliwe?

10. Suma cyfr liczby n wynosi 2010, a suma cyfr liczby $44n$ wynosi 8040. Jaka może być suma cyfr liczby $3n$?

11. Znajdź taką liczbę naturalną, że jeżeli jej cyfrę jedności równą 6 przeniesiemy na początek, to otrzymamy liczbę 4 razy większą.

12. Niech $\pi(n)$ oznacza iloczyn cyfr liczby n. Rozpoczynamy od liczby naturalnej a_1, następnie obliczamy $a_2 = a_1 + \pi(a_1)$, $a_3 = a_2 + \pi(a_2)$, $a_4 = a_3 + \pi(a_3)$, ... Czy może się zdarzyć, że otrzymany w ten sposób ciąg a_1, a_2, a_3, a_4, ... będzie nieograniczony z góry?

13. Wykaż, że wśród dowolnych 39 kolejnych liczb naturalnych można znaleźć liczbę o sumie cyfr podzielnej przez 11. A jak będzie dla 38 kolejnych liczb?

14. Uzasadnij, że istnieje n-cyfrowa liczba podzielna przez 2^n zawierająca tylko cyfry 1 i 2. A co się stanie dla innych par cyfr?

15. Uzasadnij, że istnieje n-cyfrowa liczba podzielna przez 5^n i nie zawierająca w zapisie żadnych zer.

16. Wykaż, że istnieje liczba postaci 5^n mająca co najmniej 2010 kolejnych zer. A czy można otrzymać dokładnie 2010 kolejnych zer?

17. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb postaci 5^n, których zapis ma na ostatnich 2010 pozycjach naprzemiennie cyfry różnych parzystości.

18. Które liczby naturalne można przedstawić w postaci sumy szóstek i siódemek? (Sumę samych szóstek lub samych siódemek też uważamy za "sumę szóstek i siódemek".)

19. Wyznacz liczbę par (x, y) liczb całkowitych spełniających równanie

$$x^4 = y^4 + 1223334444.$$

20. Znajdź wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których liczba

$$\sqrt{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) + 1}$$

jest liczbą całkowitą.

21. Udowodnić, że równanie $4m(m+1) = n(n+1)$ nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n.

22. Wykazać, że jeżeli iloczyn liczb całkowitych a, b jest liczbą parzystą, to istnieją takie liczby całkowite x, y, że zachodzi równość $a^2 + b^2 + x^2 = y^2$.

23. Udowodnić, że dla dowolnych liczb całkowitych a, b, c, d, przy czym liczby a i b są różne, równanie $(x + ay + c)(x + by + d) = 2$ ma co najwyżej cztery rozwiązania w liczbach całkowitych x, y.

24. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej $n > 1$ liczba $n^n - n^2 + n - 1$ dzieli się przez $(n-1)^2$.

25. Niech $a_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}$. Znaleźć największy wspólny dzielnik liczb a_0, a_1, ..., a_{2000}.

26. Dana jest liczba naturalna $n \geq 3$. Dowieść, że suma sześcianów wszystkich liczb naturalnych względnie pierwszych z n i mniejszych od n dzieli się przez n.

27. Znaleźć wszystkie możliwe wartości, jakie może przyjąć największy wspólny dzielnik liczb $n^2 + 1$ i $(n+1)^2 + 1$ dla różnych wartości naturalnych n.

28. Rozwiązać równanie $x! + y! + z! = u!$ w liczbach całkowitych nieujemnych x, y, z, u.

29. Niech $S(n)$ oznacza sumę cyfr liczby n. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $S(2n^2 + 3)$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

30. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych m, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $n^4 + m$ jest złożona.

31. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $19 \cdot 8^n + 17$ jest złożona.

32. Znajdź wszystkie pary liczb pierwszych p, q takie, że $p^q + q^p$ także jest liczbą pierwszą.

33. Dla jakich trójek cyfr (a, b, c) równość

$$\overline{\underbrace{aa\ldots aaa}_{n}\underbrace{bb\ldots bbb}_{n}} + 1 = (\underbrace{\overline{cc\ldots ccc}}_{n} + 1)^2$$

zachodzi dla wszystkich n?

34. Dla jakich trójek cyfr (a, b, c) równość

$$\underbrace{\overline{aa\ldots aaa}}_{2n} - \underbrace{\overline{bb\ldots bbb}}_{n} = (\underbrace{\overline{cc\ldots ccc}}_{n})^2$$

zachodzi dla przynajmniej dwóch liczb naturalnych n?

35. Iloma jednakowymi cyframi może kończyć się kwadrat liczby naturalnej?

36. Wykaż, że dla każdego n istnieje n-cyfrowy kwadrat liczby naturalnej, którego cyfry tworzą ciąg niemalejący.

8. ZASADA SZUFLADKOWA DIRICHLETA

Nazwa "zasada szufladkowa Dirichleta" (będziemy pisali ZSD) kryje pod sobą bardzo proste stwierdzenie.

Twierdzenie 8.1 (ZDS, wersja 1)
Jeśli $n+1$ elementów nalezy do co najwyżej n zbiorów, to w (przynajmniej) jednym zbiorze są (przynajmniej) dwa elementy.

Oczywiście dowód tego twierdzenia jest natychmiastowy - zakładając nie wprost, że w każdym ze zbiorów jest co najwyżej 1 element dostajemy sprzeczność. Najciekawsze jest to, że tak prosty fakt może być wykorzystany na różne (czasem dość wymyślne) sposoby. Zobaczymy to później w zadaniach.

Najpierw jednak sformułujmy jeszcze kilka wersji ZSD (dowód każdej jest podobnie prosty).

Twierdzenie 8.2 (ZDS, wersja 2)
Jeśli $kn+1$ elementów należy do co najwyżej n zbiorów, to w (przynajmniej) jednym zbiorze jest (przynajmniej) $k+1$ elementów.

Twierdzenie 8.3 (ZDS, wersja 3)
Jeśli nieskończenie wiele elementów należy do skończonej liczby zbiorów, to w (przynajmniej) jednym zbiorze jest nieskończenie wiele elementów.

Twierdzenie 8.4 (ZDS, wersja 4)
Jeśli w figurze o polu P wybierzemy zbiory $P_1, ..., P_n \subseteq P$ dla których $|P_1| + ... + |P_n| > k|P|$, to istnieje punkt, który należy do (przynajmniej) $k+1$ zbiorów P_i, $i = 1, ..., n$.

Jako przykład zastosowania ZSD podamy następujący fakt.

Fakt 8.5
Każda liczba pierwsza p, różna od 2 i 5, ma wielokrotność, która w zapisie dziesiętnym ma postać $\overline{9....9}$.

Dowód. Niech p będzie liczbą pierwszą z zadania i rozważmy liczby:

$$9, 99, 999, ..., \underbrace{9...9}_{p+1}.$$

Liczb tych jest $p+1$, a reszt z dzielenia przez p jest p. Zatem z ZSD dwie z tych liczb mają tę samą resztę z dzielania przez p, tzn.

$$\underbrace{9...9}_{m} \equiv \underbrace{9...9}_{n} \pmod p$$

dla $m > n$. Zatem

$$p | \underbrace{9...9}_{m-n}\underbrace{0...0}_{n} = \underbrace{9...9}_{m-n} \cdot 10^n.$$

Ponieważ p i 10^n są względnie pierwsze, to z jednoznaczności rozkładu na czynniki wynika, że $p|\underbrace{9...9}_{m-n}$, co kończy dowód faktu.

8.1. Lista zadań.

---

1. Pokaż, że wśród dowolnych 11 liczb całkowitych są dwie, których różnica dzieli się przez 10.

2. Wykaż, że z danych $n + 1$ liczb całkowitych znajdą się dwie, których różnica jest podzielna przez n.

3. Udowodnij, że w Warszawie są dwie osoby, które mają tą samą liczbę włosów (przyjmujemy 500 000 jako ograniczenie górne na liczbę włosów u człowieka).

4. Udowodnij, że wśród dowolnie wybranych 7 krawędzi sześcianu istnieją co najmniej 3 wzajemnie równoległe.

5. W klasie jest 40 uczniów. Czy jest wśród nich czwórka uczniów urodzonych w tym samym miesiącu?

6. Na odcinku $< 0, 1 >$ leży 9 różnych punktów. Wykaż, że można wybrać takie dwa z nich, że ich odległość jest niewiększa niż $\frac{1}{8}$.

---

7. Uzasadnij, że wśród 37 liczb niepodzielnych przez 7 zawsze można wybrać 7 liczb, których suma dzieli się przez 7.

8. W kwadracie o boku 2 leży 5 punktów. Uzasadnij, że znajdziemy takie dwa, że ich odległość jest mniejsza lub równa $\sqrt{2}$.

9. W kwadracie o boku 4 leży 17 punktów. Uzasadnij, że znajdziemy takie dwa, że ich odległość jest mniejsza lub równa $\sqrt{2}$.

10. Udowodnij, że jeśli w trójkącie równobocznym o boku 4 umieścimy 17 punktów, to znajdą się dwa, które są w odległości niewiększej niż 1.

11. W trójkącie równobocznymo boku długości 12 umieszczono 300 punktów. Pokaż, że pewne 3 z nich tworzą trojkąt o obwodzie niewiększym niż 3.

12. Spośród liczb $1, 2, ..., 9$ wybrano sześć. Uzasadnij, że spośród wybranych liczb są dwie, których suma jest równa 10.

13. Danych jest 7 liczb całkowitych. Wykaż, że wśród nich zawsze będą takie dwie, których różnica kwadratów jest podzielna przez 10.

14. Wykaż, że w dowolnej grupie osób zawsze są dwie, które mają tę samą liczbę znajomych (zakładamy, że jeśli jedna osoba zna drugą, to jest też odwrotnie).

15. Na płaszczyźnie danych jest 5 punktów kratowych. Udowodnij, że można wybrać dwa z nich takie, że środek odcinka je łączącego też jest punktem kratowym.

16. Udowodnij, że w dowolnym wielościanie

(a) pewne dwa wierzchołki,

(b) pewne dwie ściany

mają tyle samo krawędzi.

17. Danych jest 6 niewspółliniowych punktów na płaszczyźnie. Wszystkie łączymy odcinkami koloru czerwonego lub niebieskiego. Udowodnij, że zawsze znajdzie się trójkąt jednego koloru.

18. Danych jest 66 niewspółliniowych punktów na płaszczyźnie. Wszystkie łączymy odcinkami koloru czerwonego, żółtego, zielonego lub niebieskiego. Udowodnij, że zawsze znajdzie się trójkąt jednego koloru.

19. Na nieskończonej szachownicy jest 1999 skoczków szachowych. Udowodnij, że można wybrać 1000 z nich takich, że żadne dwa się nie biją.

20. Wykaż, że wśród dowolnie wypisanych 7 (n) liczb całkowitych zawsze można wskazać pewną liczbę kolejnych, których suma jest podzielna przez 7 (n).

21. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej istnieje taka jej wielokrotność, że w jej zapisie dziesiętnym występują tylko cyfry 0 i 1.

22. Uzasadnij, że wśród liczb $1, 11, 111, ...$ jest liczba podzielna przez 2009.

23. Udowodnij, że z dowolnego $10-$elementowego zbioru złożonego z liczb dwucyfrowych można wybrać dwa rożne niepuste podzbiory, których sumy elementów będą równe.

24. Danych jest 2008 liczb całkowitych. Wykaż, że zawsze można spośród nich wybrać trzy liczby a, b, c takie, że $a(b-c)$ jest podzielne przez 2008.

25. Udowodnij, że dla dowolnych $2^{n-1}+1$ podzbiorów zbioru $n-$elementowego zawsze znajdą się dwa zbiory rozłączne.

---

26. Mamy 20 worków i 20 kotów. Dla każdego worka i każdego kota ustalamy cenę (worek kosztuje $2, 10-4$ zł; kot $10-12$ zł; ceny są wielokrotnościami 1 gr). Czy możemy tak ustalić ceny (różne dla różnych worków i kotów), żeby każdy zestaw kot-worek był w innej cenie?

27. Wykaż, że w ciągu Fibbonacciego można znaleźć liczbę podzielną przez 2020.

28. W ciągu $0, 0, 1, 2, 3, 6, 12, 23, 44, 85, ...$ każdy wyraz (począwszy od piątego) jest sumą czterech poprzednich. Wykazać, że pewne dwie kolejne liczby w tym ciągu są podzielne przez 14.

29. Niech p będzie liczbą pierwszą. Udowodnić, że istnieją liczby całkowite x, y takie, że $p|x^2+y^2+1$. [7]

30. Danych jest 11 różnych liczb całkowitych. Udowodnić, że można z nich wybrać 6 liczb, których suma jest podzielna przez 6. [8]

31. W sześciu kratkach tabeli 4×4 narysowano gwiazdki. Udowodnić, że można wykreślić dwa wiersze i dwie kolumny tej tabeli w taki sposób, aby w niewykreślonych polach nie pozostały żadne gwiazdki.

32. W prostokącie o wymiarach 20×25 narysowano 120 kwadratów o boku długości 1. Wykazać, że można w tym prostokącie narysować koło o średnicy 1 i nie przecinające żadnego z kwadratów.

33. Każdy punkt okręgu pomalowano jednym z trzech kolorów. Dowieść, że pewne trzy punkty jednakowego koloru sa wierzchołkami trójkąta równoramiennego. [9]

34. W kole o promieniu 10 wybrano 372 punkty. Wykaż, że istnieje pierścień o promieniach 2 i 3, który zawiera co najmniej 12 z tych punktów.

35. Spośród liczb $1, 2, ..., 2020$ $(1, 2, ..., 2n)$ liczb wybrano 1011 $(n+1)$ sztuk. Dowieść, że wśród wybranych są dwie, z których jedna dzieli się przez drugą. [10]

[7] *Wskazówka:* Jakie reszty dają liczby $0^2, 1^2, 2^2, ..., \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$? A jakie liczby $-1-0^2, -1-1^2, ..., -1-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$?

[8] *Wskazówka:* Z pięciu liczb można wybrać 3, których suma dzieli się przez 3.

[9] *Wskazówka:* Rozważ 13-kąt wpisany w okrąg.

[10] *Wskazówka:* Liczby zapisujemy jako $n\cdot 2^k$ (n nieparzyste). Ile jest możliwości na n?

36. Ze zbioru $\{1, 2, ..., 100\}$ wybrano 26 liczb. Pokazać, że spośród nich można wybrać niepusty podzbiór, którego iloczyn jest kwadratem liczby całkowitej.

9. NIERÓWNOŚCI

9.1. **Wprowadzenie.** W tym rozdziale zajmiemy się problemem szacowania wielkości matematycznych. Naszym celem jest nabranie umiejętności spojrzenia na wyrażenia matematyczne w sposób przybliżony - gdy nie interesuje nas konkretna wartość wyrażenia, ale pewne ogólne własności (np. ograniczenie górne/dolne przez jakąś liczbę lub prostsze wyrażenie). W tym rozdziale nie podajemy żadnej teorii. Zamiast tego skupimy się na przykładach, które sprowadzają się jedynie do przekształceń algebraicznych i elementarnych nierówności.

9.1.1. *Przykłady.*

Przykład 9.1
Oszacuj liczbę 1000! od góry i dołu przez potęgi dziesiątki.

Rozwiązanie. W iloczynie mamy 9 liczb jednocyfrowych, 90 dwucyfrowych, 900 trzycyfrowych oraz liczbę 1000. Oczywiście każda liczba x, która ma n cyfr spełnia $10^{n-1} \leq x < 10^n$. Zatem

$$1000! \geq 1^9 \cdot 10^{90} \cdot 100^{900} \cdot 1000 = 10^{90+1800+3} = 10^{1893},$$
$$1000! \leq 10^9 \cdot 100^{90} \cdot 1000^{900} \cdot 1000 = 10^{9+180+2700+3} = 10^{2892},$$

z czego wynika, że liczba 1000! ma co najmniej 1894 cyfry oraz co najwyżej 2893 cyfry. □

Przykład 9.2
Wskaż n_0 takie, że dla liczby $n \geq n_0$ prawdziwa jest nierówność

$$n^4 \leq 2^n. \tag{9.1}$$

Rozwiązanie. Wykorzystamy ZIM. Zacznijmy nietypowo od drugiego kroku indukcyjnego:

- **Z2.** zakładamy, że dla pewnego k zachodzi $k^4 \leq 2^k$. Wtedy:
$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geq 2k^4 \geq^{(?)} (k+1)^4,$$
przy czym nierówność (?) zachodzi dokładnie, gdy $2 \geq \left(\frac{k+1}{k}\right)^4 = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^4$. Zauważmy teraz, że dla $k = 6$ nierówność zachodzi, bo $(7/6)^4 \leq 2$ (sprawdź). Dla większych k prawa strona jest jeszcze mniejsza, czyli pokazaliśmy, że krok indukcyjny zachodzi od $k = 6$.
- **Z1.** niestety nierówność (9.1) nie jest prawdziwa dla $n = 6$, ale łatwo ją sprawdzić n.p. dla $n = 20$, bo $(L) = 20^4 = 160000$ i $(P) = 2^{20} = \left(2^{10}\right)^2 \geq 1000^2$.

Na mocy zmodyfikowanej ZIM nierówność jest prawdziwa dla $n \geq 20$. □

Przykład 9.3
Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D (niezależne od n) udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{4n^4 + 3n^3 - 2}{5n^4 - 4n^2 + 2} \leq D\ .$$

Rozwiązanie. Szacując dane wyrażenie od góry otrzymujemy

$$\frac{4n^4 + 3n^3 - 2}{5n^4 - 4n^2 + 2} \leq \frac{4n^4 + 3n^4 - 0}{5n^4 - 4n^4 + 0} = \frac{7n^4}{n^4} = 7\ .$$

Z kolei szacowanie od dołu prowadzi do

$$\frac{4n^4 + 3n^3 - 2}{5n^4 - 4n^2 + 2} \geq \frac{4n^4 + 0 - 2n^4}{5n^4 - 0 + 2n^4} = \frac{2n^4}{7n^4} = \frac{2}{7}\ .$$

Zatem dane w zadaniu nierówności są spełnione ze stałymi $C = 2//7$ oraz $D = 7$. □

Przykład 9.4

Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D (niezależne od n) udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \le \frac{4n^4 - 3n^3 + 2}{5n^4 + 4n^2 - 2} \le D\ .$$

Rozwiązanie. Szacując dane wyrażenie od góry otrzymujemy

$$\frac{4n^4 - 3n^3 + 2}{5n^4 + 4n^2 - 2} \le \frac{4n^4 - 0 + 2n^4}{5n^4 + 0 - 2n^4} = \frac{6n^4}{3n^4} = 2\ .$$

Z kolei szacowanie od dołu prowadzi do

$$\frac{4n^4 - 3n^3 + 2}{5n^4 + 4n^2 - 2} \ge \frac{4n^4 - 3n^4 + 0}{5n^4 + 4n^4 - 0} = \frac{n^4}{9n^4} = \frac{1}{9}\ .$$

Zatem dane w zadaniu nierówności są spełnione ze stałymi $C = 1//9$ oraz $D = 2$. □

Przykład 9.5

Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D oraz liczbę rzeczywistą k udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności:

$$C \cdot n^k \le \frac{n^6 + 2n^4 + 1}{\sqrt{n} + 2} \le D \cdot n^k.$$

Rozwiązanie. Domyślamy się, że $k = 5,5$ (w liczniku wyrażenia najważniejszym składnikiem jest n^6, a w mianowniku $\sqrt{n}$). Szacujemy z góry:

$$\frac{n^6 + 2n^4 + 1}{\sqrt{n} + 2} \le \frac{n^6 + 2n^6 + n^6}{\sqrt{n}} = 4n^{5,5}$$

I z dołu:

$$\frac{n^6 + 2n^4 + 1}{\sqrt{n} + 2} \ge \frac{n^6}{\sqrt{n} + 2\sqrt{n}} = \frac{1}{3}n^{5,5}.$$

□

9.2. **Lista zadań.**

1. Oszacuj przez potęgi dziesiątki następujące liczby:

$$2^{1000}, \quad 100!.$$

2. Dla $a, b \in \mathbf{R}$ oraz $c > 0$ udowodnij nierówności:

$$a^2 + b^2 \ge 2ab, \quad a^3 + 2 \ge 2a\sqrt{a}, \quad 2(a^2 + b^2) \ge (a + b)^2.$$

3. Dowiedź, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \ge$ .... zachodzi nierówność

$$n^2 \le 2^n\ .$$

W miejsce kropek wstaw liczbę, dla której udaje się łatwo zredagować dowód.

4. Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności $C < W(n) < D$.

(a) $W(n) = \dfrac{n^4 + 16n + 3}{2n^4 + 7n^2}$

(b) $W(n) = \dfrac{\sqrt{n+7} + 3}{\sqrt{n+3} + 7}$

(c) $W(n) = \sqrt[3]{n^3+n^2} - n$

---

5. Oszacuj od góry i dołu wyrażenie
$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3} + \ldots + \sqrt{9n}\,.$$

6. Dowiedź, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq$ .... zachodzi nierówność
$$n^8 \leq 2^n\,.$$
Zastanowić się nad modyfikacją dowodu tak, aby zmniejszyć liczbę wpisaną w miejsce kropek.

7. Oszacuj podane poniżej wyrażenia od góry i od dołu ($n \in \mathbf{N}$) przez wyrażenia różniące się stałym czynnikiem dodatnim (o ile nie podano inaczej).

(a)
$$\frac{n^4+2n^3+n+7}{4n^4+n^2+15},$$

(b)
$$\frac{n\sqrt{n+4}+5}{\sqrt{n^3+4}+1},$$

(c)
$$\frac{2^n+10n^2}{2^n+n^4},$$

(d)
$$\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+3}+\ldots+\sqrt{2n^2}}{2n+5},$$

(e)
$$\frac{n!}{n!+10^n},$$

(f)
$$\frac{n^6+5n+4}{2n^3-n^2+7},$$

(g)
$$\frac{x}{x^2+1} \qquad \text{(tylko od góry, } x \in \mathbf{R}\text{)},$$

(h)
$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

(i)
$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}, \qquad \text{(szacowanie postaci } g \pm C/n\text{)},$$

8. Która z liczb jest większa:

$$2^{1000!} \text{ czy } 999^{999!}?$$

$$26^{99} \text{ czy } 10^{151}?$$

$$\prod_{i=2}^{2009} \prod_{j=1}^{i-1} \left(\sqrt[j]{j} - \sqrt[i]{i} \right) \text{ czy } 10^{-1000000}?$$

9. Uprość wyrażenie[11]

$$\left(3^{2^n} - 2^{2^m}\right) \cdot \prod_{i=0}^{37} \left(3^{2^{n+i}} + 2^{2^{m+i}}\right) .$$

10. Niech $a = \sqrt[16]{2}$. Która z liczb jest większa

$$a^{256} \qquad \text{czy} \qquad 256^a \; ?$$

11. Uporządkuj następujące liczby w kolejności rosnącej:

$$a = \left(5 - \sqrt{37}\right)^{2008}, \qquad b = \left(6 - \sqrt{37}\right)^{2009}, \qquad c = \left(7 - \sqrt{73}\right)^{2011}. \qquad d = \left(9 - \sqrt{73}\right)^{2013}.$$

12. Która z liczb jest większa $2^{2^{2^{1001}}}$ czy $1000^{2^{2^{1000}}}$?

13. Wskaż taką liczbę naturalną n, że

$$n^{1000000} + 1 < 2^n .$$

14. Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą k udowodnij nierówności $10^k < L < 10^{2k}$.

(a) $L = 3972^{257}$

(b) $L = 700!$

15. Wskazując odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$1 - \frac{C}{n} < W(n) < 1 + \frac{C}{n} .$$

(a) $W(n) = \dfrac{n^2 + 2n + 3}{n^2 + 7n + 2}$

(b) $W(n) = \dfrac{\sqrt{4n^2 + 1}}{2n + 1}$

16. W każdym z ośmiu poniższych zadań wpisz w miejscu kropek dwie liczby występujące w ciągu 0, 1, 2, 5 , 10, 100, 10^5, 10^{10}, 10^{20}, 10^{50}, 10^{100}, 10^{200}, 10^{500}, 10^{1000}, 10^{2000}, 10^{5000}, 10^{10000}, 10^{20000}, 10^{50000}, 10^{100000}, 10^{200000}, 10^{500000}, $10^{1000000}$ na kolejnych miejscach tak, aby powstały prawdziwe nierówności.

[11] Uwaga: zgodnie z obowiązującą konwencją, w napisie typu a^{b^c} potęgowanie wykonuje się *od góry*, tzn. $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

$$\dots < 10000! < \dots,$$
$$\dots < 2^{10000} < \dots,$$
$$\dots < \binom{10000}{5} < \dots,$$
$$\dots < 30^{10000} < \dots,$$
$$\dots < 2^{2^{10}} < \dots,$$
$$\dots < 665! < \dots,$$
$$\dots < 4444^{4444} < \dots,$$
$$\dots < 7777^{7777} < \dots,$$

17. Dowiedź, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq$ .... zachodzi nierówność
$$n^{32} \leq 2^n \ .$$
W miejsce kropek wstaw dowolną liczbę, dla której umiesz przeprowadzić dowód. Następnie zastanów się nad modyfikacją dowodu tak, aby zmniejszyć liczbę wpisaną w miejsce kropek.

18. Wskaż liczbę naturalną $n > 1$ spełniającą nierówność
$$n^{1000} < 2^n \ .$$

19. Udowodnij nierówność
$$n^{2^{27}} \leq 2^n$$
dla wybranej przez siebie liczby naturalnej $n > 1$. (Należy wybrać jedną liczbę n spełniającą nierówność i dla tej liczby udowodnić nierówność.)

10. WIĘCEJ NIERÓWNOŚCI

10.1. **Wprowadzenie.** W tym rozdziale sformułujemy i udowodnimy kilka klasycznych nierówności. Niech $a_1, a_2, ...$ będą dodatnimi liczbami.

Definicja 10.1
Średnią arytmetyczną liczb $a_1, ..., a_n$ nazywamy liczbę

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}.$$

Średnią geometryczną liczb $a_1, ..., a_n$ nazywamy liczbę

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}.$$

Średnią harmoniczną liczb $a_1, ..., a_n$ nazywamy liczbę

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}.$$

Średnią kwadratową liczb $a_1, ..., a_n$ nazywamy liczbę

$$K_n = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}\right)^{1/2}.$$

Łatwo zauważyć, że średnia jest zawsze liczbą pomiędzy największą a najmniejszą z "uśrednianych" liczb[12]

Powyższe oznaczenia (A_n, G_n, H_n, K_n) będą używane poniżej bez wracania do definicji. Np. A_7 oznacza średnią arytmetyczną liczb $a_1, ..., a_7$ oraz G_{n-1} średnią geometryczną liczb $a_1, ..., a_{n-1}$.

Twierdzenie 10.2 (Nierówność Cauchy'ego o średnich)
Pomiędzy średnimi zachodzą następujące nierówności: $H_n \leq G_n \leq A_n \leq K_n$, tzn.

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \leq \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}\right)^{1/2}.$$

Dodatkowo: jeśli w powyższym zachodzi jakakolwiek równość, to $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Dowód. Mamy do udowodnienia trzy nierówności. Pierwsza z nich wynika z drugiej (zob. zadanie 18).

Dowód nierówności $G_n \leq A_n$ Zauważmy, że udowodniliśmy już tę nierówność w problemie 30 z rozdziału o indukcji. Tutaj podamy inny dowód indukcyjny. Oczywiście dla $n = 1$ nierówność jest równością. Załóżmy, że nierówność zachodzi dla $n-1$, tzn. $G_{n-1} \leq A_{n-1}$ oraz równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = ... = a_{n-1}$. Rozważmy teraz układ n liczb: $a_1, ..., a_n$. Niech a_i będzie najmniejszą z nich oraz a_j - największą. Gdyby $a_i = a_j$, to wszystkie były by równe i nie ma co robić. Załóżmy zatem, że $r := a_j - a_i > 0$. Wykonamy teraz następującą operację: liczby a_i i a_j "zbliżamy" do siebie zastępując przez $a_i + \varepsilon$ i $a_j - \varepsilon$ dla $\varepsilon < r/2$. Zauważmy, że ta operacja nie zmienia średniej arytmetycznej A_n (sprawdź!) natomiast zwiększa średnią geometryczną G_n, ponieważ

$$(a_i + \varepsilon)(a_j - \varepsilon) = a_i \cdot a_j + \varepsilon(a_j - a_i) - \varepsilon^2 = a_i \cdot a_j + \varepsilon(a_j - a_i - \varepsilon) > a_i \cdot a_j.$$

[12]Tak naprawdę, to ta własność jest definicją "średniej".

Oczywiście $a_i < A_n < a_j$, więc poprzez "zbliżanie" możemy zamienić parę a_i, a_j tak, aby jedna z nich wynosiła A_n (tutaj A_n jest średnią arytmetyczną zarówno przed i po zamianie). Mamy zatem udowodnić nierówność:

$$A_n \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot A_n}$$

Która jest równoważna nierówności:

$$A_n^{1-\frac{1}{n}} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}},$$

a ta nierówność po podniesieniu do potęgi $n/(n-1)$ staje się dokładnie nierównością $G_{n-1} \leq A_{n-1}$, która jest prawdziwa z założenia indukcyjnego. □

10.1.1. *Przykłady.*

Przykład 10.3
Dla $x > 0$ zachodzi

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

przy czym równość zachodzi dokładnie wtedy, gdy $x = 1$.

Dowód. Dzieląc obie strony przez 2 po lewej stronie otrzymujemy średnią arytmetyczną liczb x i $1/x$. Średnia geometryczna tych liczb jest równa 1. Równość w powyższych średnich zachodzi, gdy $x = 1/x$, czyli $x = 1$. □

Przykład 10.4
Udowodnij nierówność

$$\sqrt[4]{a^2bc} + \sqrt[4]{b^2ca} + \sqrt[4]{c^2ab} \leq a + b + c.$$

Kiedy zachodzi równość?

Rozwiązanie. Wyrażenie $\sqrt[4]{a^2bc}$ jest średnią geometryczną liczb a, a, b, c zatem jest nie większa od $(a + a + b + c)/4$. Postępując podobnie dla pozostałych pierwiastków mamy

$$\sqrt[4]{a^2bc} + \sqrt[4]{b^2ca} + \sqrt[4]{c^2ab} \leq \frac{(a + a + b + c) + (b + b + c + a) + (c + c + a + b)}{4} = a + b + c.$$

□

10.2. **Lista zadań.** Na tej liście zadań n oznacza liczbę naturalną, a pozostałe występujące liczby są rzeczywiste i dodatnie, chyba że jest powiedziane inaczej. Polecenie jest jedno: "Udowodnij nierówność".

1.

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2,$$

2.

$$2 \cdot (a^2 + b^2) \geq (a + b)^2,$$

3.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a + b},$$

4.

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc,$$

5.

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6.$$

6.

$$a^6 + b^9 \geq 12a^2b^3 - 64$$

7.

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq 4$$

8.

$$\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{bcd} + \sqrt[3]{cda} + \sqrt[3]{dab} \leq a+b+c+d$$

9. dla $0 < a_i < 1$ oraz $S = a_1 + \ldots + a_n$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1-a_i} \geq \frac{nS}{n-S}$$

10.

$$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

11.

$$\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} \leq \sqrt{15}, \text{ o ile } a+b+c=1$$

12.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{S-a_i} \geq \frac{n}{n-1}, \text{ gdzie } S = a_1 + \ldots + a_n$$

13.

$$2(a^3+b^3)^2 \geq (a^2+b^2)^3$$

14.

$$\sqrt[n]{ab} + \sqrt[n]{bc} + \sqrt[n]{ca} \leq \sqrt[n]{3^{n-2}} \text{ dla } a,b,c \text{ takich, że } a+b+c=1$$

15.

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^m > n^{m+1}$$

16. Liczby dodatnie x, y, z spełniają warunek $xyz = 1$ Udowodnij, że $(x+2y)(y+2z)(z+2x) \geq 27$.

17. Liczby dodatnie x, y, z spełniają warunek $x+y+z=1$. Wykaż, że:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) \geq 64.$$

18. Z nierówności $G_n \leq A_n$ wywnioskuj nierówność $H_n \leq A_n$. Użyj podstawienia takiego, by średnia arytmetyczna zamieniła się w harmoniczną.

19.

$$a+b+c \leq 9 \text{ dla } a,b,c \text{ takich, że } a^3+b^3+c^3 = 81$$

20.

$$a^3+b^3+c^3 \geq 16\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ dla } a,b,c \text{ takich, że } a^2+b^2+c^2=8$$

21.

$$\frac{1}{a+ab+abc}+\frac{1}{b+bc+bca}+\frac{1}{c+ca+cab} \leq \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{abc}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

22. Niech a,b,c będą długościami boków trójkąta. Boki te spełniają równość $bc+ac+ab=27$. Wykaż, że $9<a+b+c<11$

23. Dowiedź, że jeśli a,b,c,d są liczbami dodatnimi, to zachodzi nierówność

$$\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{a+b+d}+\frac{1}{a+c+d}+\frac{1}{b+c+d} \geq \frac{16}{3(a+b+c+d)}.$$

24. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1,...x_n$ ma miejsce:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{2i}}{2^n}.$$

25. Suma liczb dodatnich a,b,c równa jest 1. Udowodnij,że:

$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc(a+b+c)} \leq (a+b+c)^2.$$

26. Znajdź wszystkie takie liczby naturalne n, że nierówność

$$x_1x_2+x_2x_3+..+x_{n-1}x_n \leq \frac{n-1}{n}(x_1^2+...+x_n^2)$$

jest prawdziwa.

27. Dowiedź, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a,b,c i liczby całkowitej $n \geq 1$ zachodzi nierówność

$$\frac{a^{n+1}}{b+c}+\frac{b^{n+1}}{a+c}+\frac{c^{n+1}}{b+a} \geq \left(\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{a+c}+\frac{c^n}{b+a}\right)\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n+c^n}{3}}.$$

28. Pokaż, że dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych zachodzi:

$$(a+b+c+d)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2+d^2)+6ab.$$

---

11. LICZNOŚĆ ZBIORU I NIESKOŃCZONOŚCI

11.1. **Wprowadzenie.** W tym rozdziale porozmawiamy o magicznym pojęciu nieskończoności, które fascynowało ludzkość od zawsze. Wszystko wydaje się prostsze, jeśli pracujemy ze zbiorami, które można policzyć i mają skończoną liczbę elementów. Jednak szybko potrzebujemy zbiorów nieskończonych: liczby całkowite, rzeczywiste, itd. Mogłoby się zdawać, że sprawa jest prosta - albo zbiór jest skończony, albo nieskończony. Jednak sprawa zbiorów nieskończonych jest dużo ciekawsza.

Przypomnijmy jednak najpierw definicję pojęcia *funkcja*. Mamy dane dwa zbiory: dziedzinę A i przeciwdziedzinę B. Funkcja $f : A \to B$ przyporządkowuje każdemu elementowi zbioru A jakiś element zbioru B. Jest jednak możliwe, że niektóre elementy zbioru B nie będą przyporządkowane żadnemu elementowi zbioru A. Ponadto, niektóre elementy zbioru B mogą być przypisane wielu elementom zbioru A. Czasem jednak chcemy, żeby funkcja była "sprawiedliwa" tzn. żeby nie zachodziły dwa zjawiska powyżej. Służą temu dwa dodatkowe pojęcia.

Definicja 11.1
Mówimy, że funkcja jest *różnowartościowa* (lub jest 1-1, lub jest *injekcją*), jeśli

- dla dowolnych $a, a' \in A$, $a \neq a'$, zachodzi $f(a) \neq f(a')$

lub, równoważnie,

- dla dowolnych $a, a' \in A$, $f(a) = f(a')$ implikuje $a = a'$.

Definicja 11.2
Mówimy, że funkcja jest "na" (lub jest *surjekcją*), jeśli

- dla każdego $b \in B$ istnieje $a \in A$, takie że $f(a) = b$

lub, równoważnie,

- każdy element zbioru B jest obrazem pewnego elementu ze zbioru A.

Za pomocą powyższych definicji możemy określić, co to znaczy, że dwa zbiory są *równoliczne* (lub są *tej samej mocy*)

Definicja 11.3
Dla danych zbiorów A i B mówimy, że są *równoliczne*, jeśli istnieje funkcja $f : A \to B$, która jest jednocześnie różnowartościowa i "na" (inaczej: jest bijekcją). Takie zdarzenie oznaczamy $|A| = |B|$ (lub $\overline{A} = \overline{B}$ lub $A \sim B$).

Nie jest trudno sprawdzić, że jeśli $|A| = |B|$, to $|B| = |A|$ (co nie wynika wprost z definicji, zob. zad. 8. Podobnie, jeśli $|A| = |B|$ oraz $|B| = |C|$, to mamy $|A| = |C|$ (zob. zad. 9).

W zadaniach przekonamy się, że liczb naturalnych jest tyle samo co całkowitych (ale również tyle samo co np. pierwszych, wymiernych (!), itd.).

Podobnie liczb rzeczywistych jest tyle samo co punktów na paraboli, ale też tyle samo co punktów w na odcinku lub okręgu. Co więcej - punktów na prostej jest tyle samo co na płaszczyźnie!

Czy wobec tego liczb całkowitych może być tyle samo co rzeczywistych? Zacznijmy jednak od tego jak zdefiniować, że pewien zbiór jest "mniejszy lub równy".

Definicja 11.4
Dla danych zbiorów A i B mówimy, że $|A| \leq |B|$, jeśli istnieje funkcja $f : A \to B$, która jest różnowartościowa.

Jak zatem powiedzieć, że gdzieś jest mniej punktów? Otóż $|A| < |B|$ jest równoważne temu, że $|A| \leq |B|$ oraz nie istnieje bijekcja pomiędzy $|A|$ i $|B|$ (tzn. $|A| \neq |B|$). Trzeba przyznać, że ta definicja jest dość złożona, bo przecież o ile można wskazać funkcję, która pokaże, że $|A| \leq |B|$, to jak uzasadnić, że nie istnieje (żadna!) funkcja, która jest bijekcją? Zobaczymy poniżej kilka przykładów, m.in. $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

Zauważmy również, że czasem jest łatwiej pokazać, że $|A| \leq |B|$ oraz $|B| \leq |A|$, ale nie tak łatwo jest wskazać dokładną bijekcję między zbiorami A i B. W takich sytuacjach możemy wykorzystać (niełatwe!) twierdzenie poniżej.

Twierdzenie 11.5 (Cantor-Bernstein)
Jeśli $|A| \leq |B|$ oraz $|B| \leq |A|$, to $|A| = |B|$.

Na koniec dodajmy jeszcze definicję tzw. *zbioru potęgowego* (będzie nam on potrzebny w przykładach). Jeśli A jest pewnym zbiorem, to $\mathbf{P}(A)$ oznacza zbiór wszystkich podzbiorów zbioru A. Np. dla $A = a, b, c$ mamy

$$\mathbf{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Spróbuj sobie wyobrazić zbiór $\mathbf{P}(\mathbb{N})$.

Na koniec: oznaczenie A^B oznacza zbiór wszystkich funkcji $f : B \to A$. Wyobraź sobie kilka przykładów.

11.2. **Lista zadań.**

---

1. Które z następujących funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są różnowartościowe? Które są "na"?
   (a) $f(x) = x + 5$,
   (b) $f(x) = |x| - 1$,
   (c) $f(x) = x^3 - 7$.

2. Niech funkcja $f : (-1, 0] \to [0, 1)$ będzie zadana wzorem $f(x) = x^2$. Udowodnij, ze jest ona róznowartościowa i "na".

3. Niech X będzie zbiorem okręgów na płaszczyźnie. Zadajemy funkcje $f : X \to (0, \infty)$ następująco: jeśli okrąg $o \in X$ ma promień r, to $f(o) = r$. Czy taka funkcja jest poprawnie zdefiniowana? Czy jest ona różnowartościowa lub "na"?

4. Wskaż jakąś bijekcję między zbiorami: $A = \{n \in \mathbb{N} : 3 < n < 14 \ i \ 2|n\}$ i $B = \{a, b, c, y, z\}$.

5. Podaj przykład dwóch zbiorów równolicznych i nierównolicznych (najlepiej nieskończonych).

---

6. Czy podane niżej funkcje są różnowartościowe lub "na"?
   (a) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(k, n) = k^2 - 4n$,
   (b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(k) = k - 4$,
   (c) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n, k) = n^2 + k^2$,
   (d) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x - y, x + y)$.

7. Uzasadnij, że jeśli dwa zbiory skończone mają tyle samo elementów, to są równoliczne.

8. Udowodnij, że jeśli $|A| = |B|$, to również $|B| = |A|$.

9. Udowodnij, że jeśli $|A| = |B|$ oraz $|B| = |C|$, to również $|A| = |C|$.

10. Uzasadnij, że wszystkie poniższe zbiory mają tę samą moc:
   (a) $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$,

(b) $F = \{100, 101, 102, ...\}$,
(c) $G = \{2, 4, 6, ...\}$,
(d) $H = \{n \in \mathbb{N} : n \equiv 5\ (mod\ 17)\}$,
(e) $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$,
(f) $I = \{k \in \mathbb{Z} : k \equiv 3\ (mod\ 7)\}$,
(g) $P = \{k \in \mathbb{N} : k$ jest l. pierwsza$\}$.

11. Pokaż, że dwa dowolne z odcinków $[0,1], [0,100], [-1,1], [43,87], [-137,-54], [a,b]$ $(a < b)$ są równoliczne.

12. Podaj równoliczność między odcinkami $[0,1], (0,1], (0,1)$.

13. Pokaż, że prosta $\mathbb{R}$ jest równoliczna z odcinkiem $(-1,1)$.

14. Wskaż równoliczność między odcinkiem $[0, 360^o)$, a okręgiem o dowolnym środku i dowolnym promieniu.

15. Pokaż, że prosta $\mathbb{R}$ jest równoliczna z wykresem dowolnej funkcji liniowej na płaszczyźnie, tzn.

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = ax + b\}.$$

16. Udowodnij, że $\mathbb{N}$ nie jest równoliczne z $(0,1)$.

17. Udowodnij, że $\mathbb{N}$ jest równoliczne z $\mathbb{N}^2 = \{(n,k) : n,k \in \mathbb{N}\}$.

18. Sprawdź, że funkcja $f : (\mathbb{N} \cup \{0\})^2 \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ zadana wzorem

$$f(n,k) = 2^n(2k+1) - 1$$

jest wzajemnie jednoznaczna ($\iff$ jest bijekcją $\iff$ jest różnowartościowa i ńa").

19. Udowodnij, że jeśli $A \subset B$, to $|A| \leq |B|$.

20. Udowodnij, że jeśli $|A| \leq |B|$ i $|B| \leq |C|$, to $|A| \leq |C|$.

21. Korzystając z tego twierdzenia udowodnij jeszcze raz zadanie 12.

22. Przypominając sobie zadanie 17 udowodnij, że

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}^+| = |\{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}|.$$

23. Wskaż bijekcję między $\mathbf{P}(A)$ oraz $\{0,1\}^A$.

---

24. Zbiór liczb niewymiernych $N\mathbb{Q}$ jest większy od $\mathbb{Q}$ (tzn. $|\mathbb{Q}| < \|N\mathbb{Q}|$),

25. $|A| < |\mathbf{P}(A)|$ (wsk. rozważ zbiór $\{a \in A : a \notin A\}$,

26. $|\{0,1\}^{\mathbb{N}} = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |\mathbf{P}(\mathbb{N})|$ (wsk. $\mathbf{P}(\mathbb{N}) = \mathbf{P}(\mathbb{N}^2)$),

27. $|\mathbb{R}| \leq |\mathbf{P}(\mathbb{Q})| = |\mathbf{P}(\mathbb{N})|$,

28. $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \leq |\mathbb{R}|$,

29. Wniosek: $|\{0,1\}|^{\mathbb{N}} = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |\mathbf{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$,

30. $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2|$ (wsk: skorzystaj z: $|\mathbb{R}| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}$).

---

12. LICZBY ZESPOLONE

12.1. **Wprowadzenie.** Liczba zespolona z, to para liczb rzeczywistych (a, b). Zapisujemy ją

$$z = a + bi.$$

Liczbę i nazywamy *jednostką urojoną*.

Liczby zespolone dodajemy naturalnie, a mnożymy tak, że $i^2 = -1$, tzn.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Elementem neutralnym dodawania (zerem), jest $0 = 0 + 0i$, a mnożenia (jedynką) $1 = 1 + 0i$. Liczbę $a = \Re(z)$ z przedstawienia $z = a + bi$ nazywamy częścią rzeczywistą, a liczbę $b = \Im(z)$ (nie bi) - częścią urojoną.

Sprzężenie liczby z to $\bar{z} = a - bi$. Moduł, to odległość pary $z = a + bi \sim (a, b)$ od początku układu na płaszczyźnie, tzn. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Każdy element $z = a + bi$ ma przeciwny $-z = -a - bi$ oraz każdy element niezerowy ma odwrotny

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Zachodzą wszystkie prawa działań znane dla liczb rzeczywistych, m.in. dodawanie i mnożenie są przemienne oraz łączne. Zachodzi prawo rozdzielności.

Liczby zespolone mają interpretację geometryczną. Rozważmy liczbę $z = a+bi$. Wyciągając przed nawias jej moduł, mamy: $z = |z|(a' + b'i)$, gdzie $a' = \frac{a}{|z|}, b' = \frac{b}{|z|}$ oraz $a' + b'i$ jest w odległości 1 od zera. Wszystkie takie liczby można zapisać, jako $\cos(\phi) + i\sin(\phi)$. Ostatecznie dostajemy:

Fakt 12.1 (Postać trygonometryczna)
Każda liczba zespolona $z \in \mathbb{C}$ jest postaci $z = r(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$, gdzie $r = |z|$, zaś ϕ to kąt pomiędzy osią $0X$, a odcinkiem $0z$. Ponadto jeśli $z_1 = r_1(\cos(\phi_1) + i\sin(\phi_1))$, oraz $z_2 = r_2(\cos(\phi_2) + i\sin(\phi_2))$, to $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2))$. Dodatkowo $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$.

Definicja 12.2
Pierwiastkiem stopnia $n \in \mathbb{N}$ z liczby zespolonej z nazywamy każdą liczbę zespoloną w taką, że $w^n = z$. (uwaga: oznaczenie $\sqrt[n]{z}$ nie jest jednoznaczne!)

Twierdzenie 12.3 (Zasadnicze twierdzenie algebry)
Niech $P(z) = a_n z^n + ... + a_0 z^0$, gdzie $a_n, a_{n-1} ..... a_0 \in \mathbf{C}$. Wtedy istnieje $w \in \mathbf{C}$ takie, /ze $P(w) = 0$.
W konsekwencji wielomian zespolony stopnia n ma n pierwiastków zespolonych (licząc z krotnościami).

Wniosek 12.4
Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych rozkłada się na czynniki liniowe o współczynnikach zespolonych.

Wniosek 12.5
Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych rozkłada się na czynniki stopnia 1 i 2 (liniowe i kwadratowe) o współczynnikach rzeczywistych.

12.2. **Lista zadań.**

1. Podaj część rzeczywistą, urojoną, moduł, sprzężenie, liczbę przeciwną i odwrotną do liczby zespolonej:

$$a)2i, \qquad b) -1+7i, \qquad c) -5-3i.$$

2. Wykonaj działania:

(a) $(5-(6+4i))-(3+2i)(3-2i)$,
(b) $(2-i)^3$,
(c) $\frac{3-i}{1+2i}$,
(d) $\frac{1+2i}{i^{2011}}$,
(e) $\frac{(\sqrt{3}+i)(2+i)}{3-4i}$.
(f) $(1-3i)\cdot(2+5i)-5-6i$,
(g) $(1+i)^3$,
(h) $(a+bi)\cdot(c+di)$,
(i) $a)(2-i)(3+2i)-5i$,
(j) $(5-(6+4i))-(3+2i)(3-2i)$,
(k) $(2-i)^3$,
(l) $\frac{3-i}{1+2i}$,
(m) $\frac{5+3i}{5-3i}\frac{9i-15}{2i+7}$,
(n) $\frac{1+2i}{i^{2011}}$,
(o) $\frac{(\sqrt{3}+i)(2+i)}{3-4i}$.

3. Oblicz i^n dla $n \in \mathbb{Z}$.

4. Uzasadnij, że jeśli $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 0$, to jedna z liczb z_i jest zerem.

5. Policz $z^{-1} = \frac{1}{z}$ dla liczb: $z = 5,\ 4i,\ 1+i,\ 4-5i,\ i-16$.

6. Udowodnij prawo rozdzielności: $(z_1+z_2)\cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_1 \cdot z_3$.

7. Znajdź z, gdy $iz+5-2i = 3z-4i$.

8. Rozwiąż równania:

$$a)|z|^2 - z = 4-2i, \quad b)|z|-z = 3+2i, \quad c)|z| = -\overline{z}, \quad d)i(z+\overline{z})+3 = 2i - i(z-\overline{z}).$$

9. Udowodnij wzory:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|, \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}.$$

10. Zapisz w postaci trygonometrycznej liczby: $a)17, \quad b) -i,$

$$c) -6+6i, \quad d)\sqrt{2}+\sqrt{6}i, \quad e)\sqrt{3}-i, \quad f)1-\sin(\alpha)+i\cos(\alpha)\ (0<\alpha<\pi/2).$$

11. Zaznacz na płaszczyźnie wektory $1+3i$ oraz $2-i$. Potem policz ich sumę i iloczyn i również zaznacz na płaszczyźnie. Dodaj i pomnóż te dwie liczby geometrycznie?

12. Udowodnij wzory:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|, \qquad z_1 \bar{\cdot} z_2 = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

13. Uzasadnij nierówności:

$$|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|, \qquad |z_1-z_2| \ge \big||z_1|-|z_2|\big|.$$

14. Rozwiąż równania kwadratowe w zmiennych zespolonych: $a) z^2 - 5z + 6$

$$b) z^2 + 1 = 0, \quad c) z^2 + 2z + 2 = 0, \quad d) z^2 - z + 1, \quad e) z^2 + z(i-4) + 5 + i = 0.$$

15. Znajdź wszystkie liczby zespolone, które spełniają równania kwadratowe:

$$a) z^2 - 5z + 6 = 0, \quad c) z^2 + 2z + 2 = 0, \quad d) z^2 - z + 1, \quad e) z^2 + z(i-4) + 5 + i = 0.$$

16. Rozwiąż równania:

$$a)\ 1 - i + \frac{1}{2z} = 3i, \quad b) |z|^2 - z = 4 - 2i, \quad c) |z| - z = 3 + 2i, \quad d) |z| = -\bar{z}, \quad e) i(z + \bar{z}) + 3 = 2i - i(z - \bar{z}).$$

17. Znajdź wszystkie liczby zespolone z, dla których $\overline{z} = z^2$.

18. Narysuj figurę złożoną z punktów, które spełniają warunek (-ki):

$$a) \mathcal{R}e(z) = 5/2, \quad b) |z| = 1, \quad c) |z - 2| = 3, \quad d) |z - i + 4| = 9,$$

$$e) \mathcal{I}m(z) \in [-1, 4) \ i \ \mathcal{R}e(z) < 7, \quad f) |z| + \mathcal{R}e(z) < 1, \quad g) \mathcal{R}e(1/z) = 2,$$

$$h) |z - 1| = |z + 2|, \quad i) |z - i| \geq |z + 1 - 3i|, \quad j) \big| |z - 2i| - |z + 2i| \big| = 4.$$

19. Wywnioskuj nierówności (geometrycznie lub algebraicznie):

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \qquad |z_1 - z_2| \geq \big| |z_1| - |z_2| \big|.$$

20. Wymnóż dwie liczby zespolone zapisane w postaci trygonometrycznej, tzn.

$$[r_1(\cos(\phi_1) + i\sin(\phi_1))] \cdot [r_2(\cos(\phi_2) + i\sin(\phi_2))].$$

21. Iterując formułę z poprzedniego zadania wyprowadź wzór de Moivre'a:

$$z^n = [r(\cos(\phi) + i\sin(\phi)]^n = r^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)).$$

22. Jak zapisać liczbę odwrotną do liczby w postaci trygonometrycznej? Jak zatem dzieli się dwie liczby w tej postaci?

23. Oblicz $(1+i)^{1000}$.

24. Oblicz: $a) (\sqrt{3} - 3i)^6, \quad b) (2 - 2i)^{17},$

$$c) \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right)^{40}, \quad d) (\cos(33^o) + i\sin(33^o))^{10}, \quad e) \frac{(1+i)^{22}}{(1 - i\sqrt{3})^6}.$$

25. Oblicz wszystkie pierwiastki:

$$a) \sqrt{2}, \quad b) \sqrt{i}, \quad c) \sqrt{1+i}, \quad d) \sqrt[3]{-1}, \quad e) \sqrt[4]{2 - i\sqrt{12}}, \quad f) \sqrt[6]{1+i}, \quad g) \sqrt[4]{-16}.$$

26. Wyraź $\sin(3\theta)$ jako funkcję $\sin\theta$. Podobnie z $\cos(3\theta), \sin(4\theta)$.

27. Rozłóż na czynniki wyrażenie:

$$x^4 + 4.$$

Podpowiedź: rozwiąż równanie $z^4 + 4 = 0$

28. Rozłóż na czynniki stopnia 1 i 2 wielomiany:

$$x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 20x + 24, \quad x^4 + 64, \quad x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2.$$

Wskazówka: w ostatnim przykładzie zauważ, że wielomian w punkcie i jest równy zero.

29. Udowodnij, że w równoległoboku przekątne przecinają się w połowie długości.

30. Udowodnij, że w trójkącie środkowe przecinają się w punkcie, który dzieli je w stosunku 2 : 1.

31. Na każdym boku czworokąta wypukłego zbudowano kwadrat. Wykaż, że odcinki, które łączą śdorki przeciwległych kwadratów są wzajemnie prostopadłe i tej samej długości.

32. Na bokach AB i AC trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, kwadraty $ABDE$ i $ACFG$. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków DG i EF . Wyznacz możliwe wartości wyrażenia $MN : BC$.

33. Dane są punkty B i C. Punkt A jest dowolnym punktem ustalonej półpłaszczyzny wyznaczonej przez prostą BC. Na bokach trójkąta ABC zbudowano, na zewnątrz, kwadraty $ABDE$ i $ACFG$. Wykaż, że wszystkie tak otrzymane proste DF przechodzą przez pewien ustalony punkt, zależny tylko od położenia B i C .

34. Trójkąty równoboczne A_1B_1C, A_2B_2C i A_3B_3C są zorientowane antyzegarowo. Punkty M_1, M_2 i M_3 są środkami odpowiednio odcinków A_2B_3, A_3B_1 i A_1B_2. Udowodnij, że trójkąt $M_1M_2M_3$ jest równoboczny i zorientowany zegarowo.

35. Trójkąty $A_1A_2A_3$ i $B_1B_2B_3$ i $A_kB_kC_k$ dla $k = 1, 2, 3$ są równoboczne i zorientowane antyzegarowo. Wykaż, że trójkąt $C_1C_2C_3$ także spełnia te warunki.

36. Niech $A = (3, 1)$, $B = (3, -1)$, $C = (7, -1)$, $D = (1, 1)$ i $O = (0, 0)$.
Oblicz $\measuredangle AOB + \measuredangle COD$.

37. Na bokach dowolnego trójkąta zbudowano, na zewnątrz, trójkąty równoboczne. Udowodnij, że ich środki tworzą trójkąt równoboczny.

38. Niech $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Wykazać, że na to, żeby liczby z_1, z_2, z_3 były wierzchołkami trójkąta równobocznego potrzeba i wystarcza, by $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

39. Wykazać, że jeżeli środek ciężkości i środek koła opisanego na trójkącie pokrywają się, to trójkąt jest równoboczny.

---

40. Rozwiązać równanie
$$\left(1 + \frac{1}{z}\right)^3 = i$$

41. Rozwiąż, względem niewiadomej z, równanie
$$az + b\overline{z} = c$$
dla $a, b, c \in \mathbb{C}$

42. Zbadaj zbiór punktów $\{z \,|\, A|z|^2 - \overline{B}z - B\overline{z} + C = 0\}$ gdzie $A \neq 0$, A, C są rzeczywiste i $|B|^2 > AC$.

43. Dla wielomianu $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych wiadomo, że: $W(1) = 17$, $W(-1) = 13$, $W(i) = 1 + i$, $W(-i) = 4 - 5i$. Policz sumę współczynników przy potęgach dających resztę 3 z dzielenia przez 4.

44. Uzasadnij, że pierwiastków zespolonych stopnia k z liczby z jest co najwyżej k.

45. Udowodnij, że $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| < 1 \Leftrightarrow Im(z) > 0$. Zinterpretuj geometrycznie.

46. Oblicz sumę i iloczyn wszystkich pierwiastków stopnia n z 1.

47. Udowodnij, że jeśli $\mathrm{Im}(z) = 0$, to $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = 1$.

48. Wyznacz liczby zespolone odpowiadające parze przeciwległych wierzchołków kwadratu, jeśli pozostałym dwu wierzchołkom odpowiadają liczby z oraz w.

49.
- Zapisz w postaci $a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$) iloczyn $(2 + i)(5 + i)(8 + i)$,
- o kątach α, β, γ wiadomo, że $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$ oraz że $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\mathrm{tg}\beta = \frac{1}{5}$, $\mathrm{tg}\gamma = \frac{1}{8}$. Oblicz $\alpha + \beta + \gamma$.

50. Powołując się wyłącznie na liczby zespolone, zapisz $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ jako sumę dwóch kwadratów.

51. Udowodnij, że jeśli P jest wielomianem rzeczywistym przyjmującym tylko wartości dodatnie, to istnieją wielomiany rzeczywiste Q, R takie, że $P(x) = Q(x)^2 + R(x)^2$.

52. * $P(x) = x^5 - 5x^3 + 4x + c,\ c \in \mathbf{R}$. Zakładamy, że ma pięć pierwiastków rzeczywistych $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5$. Niech: $Q(x) = (x - x_1^2)(x - x_2^2)(x - x_3^2)(x - x_4^2)(x - x_5^2)$ Ile wynosi suma modułów współczynników wielomianu $Q(x)$?

53. * Niech a, b będą liczbami rzeczywistymi. Rozważmy funkcje $f(x) = ax + b|x|$ oraz $g(x) = ax - b|x|$. Wykazać, że jeśli $f(f(x)) = x$ dla każdej liczby rzeczywistej x, to również $g(g(x)) = x$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

54. * Znaleźć wszystkie wielomiany W o współczynnikach rzeczywistych, mające następującą własność: jeśli $x + y$ jest liczbą wymierną, to $W(x) + w(y)$ jest liczbą wymierną .

55. Pokaż, że $\sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{n}{2k} = 2^{1/n}\cos(\frac{n\pi}{4})$.

56. Pokaż, że $\cos(\frac{\pi}{11}) + \cos(\frac{3\pi}{11}) + \cdots + \cos(\frac{9\pi}{11}) = \frac{1}{2}$.

57. Wyznacz liczby zespolone odpowiadające parze przeciwległych wierzchołków kwadratu, jeśli pozostałym dwóm wierzchołkom odpowiadaja liczby z oraz w.

58. Opisz geometrycznie przekształcenie płaszczyzny $z \to iz$.

59. Udowodnij, że $|\frac{z-i}{z+i}| < 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Im(z) > 0$. Zinterpretuj geometrycznie.

60. Pokaż Ptomeleusza: $ABCD$ jest czworokątem wypukłym. Wówczas $|AC| \cdot |BD| \leq |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|$, a równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg.

61. Przedstaw $\cos(x) + \cos(3x) + \cdots + \cos((2n-1)x)$ w postaci iloczynu.

62. Pięciokąt foremny wpisujemy w okrąg, a następnie wybieramy pewien punkt p na tym okręgu, który nie jest wierzchołkiem. Pokaż, że suma kwadratów długości odcinków łączących punkt p z wierzchołkami pięciokąta jest niezależna od wyboru punktu p.

63. Niech $W(x)$ będzie wielomianem takim, że dla każdej liczby rzeczywistej x mamy $W(x) \geq 0$, Pokaż, że istnieją wielomiany P, Q takie, że $W(x) = P^2(x) + Q^2(x)$.

64. Znaleźć wszystkie liczby zespolone z, dla których $\overline{z} = z^2$.

65. Niech $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Wykazać, że na to, żeby liczby z_1, z_2, z_3 były wierzchołkami trójkąta równobocznego potrzeba i wystarcza, by $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

66. Wykazać, że jeżeli środek ciężkości i środek koła opisanego na trójkącie pokrywają się, to trójkąt jest równoboczny.

67. Rozwiązać równanie

$$\left(1 + \frac{1}{z}\right)^3 = i$$

68. Rozwiązać, względem niewiadomej z, równanie

$$az + b\overline{z} = c$$

dla $a, b, c \in \mathbb{C}$

69. Iloczyn wszystkich zbiorów domkniętych i wypukłych zawierających zbiór A nazywamy *otoczką wypukłą* zbioru A i oznaczamy symbolem $conv(A)$. Wykazać, że

$$conv\{z_1; z_2; \ldots; z_n\} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} m_k z_k \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} m_k = 1,\ m_k \geq 0 \right\}$$

70. Wykazać, że gdy dla pewnego ζ mamy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\zeta - z_k} = 0$$

to $\zeta \in conv\{z_1; z_2; \ldots ; z_n\}$

71. Udowodnić Twierdzenie Gaussa-Lucasa:
Wszystkie miejsca zazrowe pochodnej wielomianu $P(z)$ należą do otoczki wypukłej miejsc zerowych wielomianu $P(z)$.

72. Udowodnić Twierdzenie Enestroma:
Niech $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z_n$, gdzie $n \geq 1$ i $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n > 0$. Wtedy zera wialomianu $P(z)$ spełniają $|z| \geq 1$

73. Zbadać zbiór punktów $\{z \,|\, A|z|^2 - \overline{B}z - B\overline{z} + C = 0\}$ gdzie $A \neq 0$, A, C są rzeczywiste i $|B|^2 > AC$.

74. Przedstwaić *homografię*

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

gdzie $ad - bc \neq 0$ w postaci superpozycji przekształceń liniowych (*homotetii* $g(z) = ez + h$) i odwrotności $(1/z)$

75. Niech

$$GL_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \; : \; a, b, c, d \in \mathbb{C}, \; ad - bc \neq 0 \right\}$$

oraz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az + b}{cz + d}$$

Pokaż, że dla $M, N \in GL_2(\mathbb{C})$ zachodzi $M(Nz) = (MN)z$. Wywnioskować wzór na przekształcenie odwrotne do $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

76. Wykazać, że każdą homografię z dwoma różnymi punktami niezmiennymi α oraz β można zapisać w postaci

$$\frac{f(z) - \alpha}{f(z) - \beta} = A \frac{z - \alpha}{z - \beta}$$

77. Wykazać, że homografia z jednym punktem niezmienniczym ∞ redukuje się do przesunięcia. Dowieść, że homografię z jednym punktem niezmiennym α można zapisać w postaci

$$\frac{1}{f(z) - \alpha} = \frac{1}{z - \alpha} + h$$

78. Dany ciąg $\{z_n\}$ określamy rekurencyjnie: z_0 jest dane, $z_{n+1} = f(z_n)$ przy czym f jest homografią bądź z jednym, bądź z dwoma punktami niezmiennymi. Zbadać zbieżność ciągu $\{z_n\}$

79. Znaleźć punkty skupienia ciągu: $z_0 = 0$, $z_{n+1} = \frac{z_n + i}{z_n - i}$

80. Dowieść, że homografia zachowuje kąty pomiędzy krzywymi.

13. CIĄGI LICZBOWE

13.1. **Wprowadzenie.** Przypomnijmy, że ciągiem a nazywamy funkcję $a : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ i najczęściej ciąg będziemy oznaczać (a_n). Taka funkcja może być zdefiniowana wzorem, ale istnieją też inne sposoby, na przykład - rekurencja (podajemy pierwsze wyrazy i relacje między sąsiednimi wyrazami). Każdy ciąg posiada swój wykres na który składają się punkty (n, a_n) w układzie kartezjańskim.

Definicja 13.1
Ciąg (a_n) nazywamy:

- *rosnącym*, gdy $\forall n \in \mathbf{N} \quad a_n < a_{n+1}$,
- *niemalejącym*, gdy $\forall n \in \mathbf{N} \quad a_n \leq a_{n+1}$,
- *malejącym*, gdy $\forall n \in \mathbf{N} \quad a_n > a_{n+1}$,
- *nierosnącym*, gdy $\forall n \in \mathbf{N} \quad a_n \geq a_{n+1}$,
- *ograniczonym*, gdy $\exists M \ \forall n \in \mathbf{N} \quad |a_n| \leq M$,
- *ograniczonym z góry*, gdy $\exists M \ \forall n \in \mathbf{N} \quad a_n \leq M$,
- *ograniczonym z dołu*, gdy $\exists m \ \forall n \in \mathbf{N} \quad a_n \geq m$.

Definicja 13.2 (Granica ciągu)
Liczbę $g \in \mathbf{R}$ nazywamy *granicą ciągu*, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbf{N} \ \ \forall n \geq N \quad |a_n - g| < \varepsilon. \tag{13.1}$$

Jeśli taka liczba g istnieje, to piszemy $g = \lim_{n\to\infty} a_n$ i mówimy, że ciąg (a_n) jest *zbieżny* do liczby g.

Powyższa definicja jest jedną z najważniejszych w analizie matematycznej. Intuicyjnie rozumiemy tak: "dalekie wyrazy ciągu są coraz bliższe liczbie g". Zauważmy, że nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$ oznacza dokładnie: "odległość liczb a_n oraz g jest mniejsza niż ε", czyli $a_n \in (g - \varepsilon, g + \varepsilon)$. Natomiast kwantyfikatory $\exists N \ \forall n \geq N$ oznaczają, że ten warunek jest prawdziwy dla wszystkich liczb $N, N+1, N+2, ...$, czyli od pewnego miejsca N. Inaczej mówiąc, jeśli g jest granicą ciągu (a_n), to biorąc dowolny przedział $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$ tylko skończenie wiele wyrazów ciągu może być poza tym przedziałem.

Powyższa definicja zakłada milcząco, że jeśli granica ciągu istnieje, to jest tylko jedna liczba g spełniająca warunek (13.1). Uzasadnimy to teraz precyzyjniej.

Fakt 13.3
Jeśli ciąg (a_n) jst zbieżny, to istnieje tylko jedna liczba g spełniająca warunek (13.1).

Dowód. Będziemy rozumowali nie wprost. Niech g_1 i g_2 będą dwiema różnymi liczbami spełniającymi (13.1). Możemy przyjąć, że $g_1 < g_2$. Oznaczmy przez $d = g_2 - g_1$ odległość tych liczb. Korzystając z definicji (13.1) dla $\varepsilon = d/2$ dostajemy N_1 i N_2 takie, że:

$$\forall n \geq N_1 \ \ |a_n - g_1| < d/2 \qquad \text{oraz} \qquad \forall n \geq N_2 \ \ |a_n - g_2| < d/2.$$

Oczywiście dla $n \geq N := \max(N_1, N_2)$ zachodzą obie te nierówności, czyli dla $n \geq N$ zachodzi

$$a_n \in (g_1 - d/2, g_1 + d/2) \cap (g_2 - d/2, g_2 + d/2),$$

ale to jest niemożliwe, bo przedziały: $(g_1 - d/2, g_1 + d/2)$ i $(g_2 - d/2, g_2 + d/2)$ są rozłączne (sprawdź to!). Otrzymana sprzeczność kończy dowód. $\square$

Fakt 13.4
Jeśli ciąg (a_n) jest zbieżny, to jest ograniczony.

Dowód. Niech $g = \lim_{n\to\infty} a_n$. Wtedy z (13.1) dla $\varepsilon = 1$ istnieje N takie, że

$$\forall n \geq N \quad |a_n - g| < 1,$$

czyli dla $n \geq N$ zachodzi $a_n \in (g-1, g+1)$. W szczególności (sprawdź to!)

$$|a_n| \leq \max(|g-1|, |g+1|)$$

dla $n = N, N+1, ...$ Niech teraz $M := \max(|a_1|, ..., |a_{N-1}|, |g-1|, |g+1|)$. Łatwo sprawdzamy, że $|a_n| \leq M$ dla wszystkich $n \in \mathbf{N}$ (dla $n < N$ jest to jasne, dla $n \geq N$ już sprawdziliśmy). □

Mając do policzenia granicę ciągu rzadko będziemy sprawdzali warunek (13.1) bezpośrednio. Mając złożone wyrażenie definiujące ciąg (a_n) możemy sprowadzić policzenie granicy $\lim_{n\to\infty} a_n$ do liczenia granicy poszczególnych "elementów" dzięki następującemu twierdzeniu.

Twierdzenie 13.5 (Arytmetyka granic)
Niech (a_n) oraz (b_n) będą ciągami zbieżnymi oraz: $A = \lim_{n\to\infty} a_n$, $B = \lim_{n\to\infty} b_n$. Wtedy:

1.
$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B,$$

2.
$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B,$$

3. Zakładając że $b_n, B \neq 0$ mamy:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}.$$

Dowód. Udowodnimy tylko własność z mnożeniem. Pozostałe własności zostawiamy jako zadania 18 i 19. Niech (a_n), (b_n), A, B będą jak wyżej. Z faktu 13.4 mamy M takie, że $\forall n \in \mathbf{N}$ mamy $|a_n| \leq M$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ [13] Pokażemy teraz, że $|a_n \cdot b_n - A \cdot B| < \varepsilon$ dla n od pewnego miejsca. Niech $M' = \max M, |B|$. Ponieważ $A = \lim_{n\to\infty} a_n$ oraz $B = \lim_{n\to\infty} b_n$ to korzystając z definicji dla $\varepsilon/2M' > 0$ (dlaczego tak można?) dostajemy N_1 i N_2 takie, że

$$\forall n \geq N_1 \quad |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2M'} \qquad \text{oraz} \qquad \forall n \geq N_2 \quad |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2M'}.$$

Oczywiście dla $n \geq N = \max(N_1, N_2)$ zachodzą obie te nierówności. I dla takich n ($n \geq N$) zachodzi to, czego potrzeba, czyli:

$$\begin{aligned}|a_n \cdot b_n - A \cdot B| &= |a_n \cdot b_n - a_n \cdot B + a_n \cdot B - A \cdot B| \leq |a_n| \cdot |b_n - B| + |a_n - A| \cdot B \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M'} + \frac{\varepsilon}{2M'} \cdot B \leq \varepsilon,\end{aligned}$$

czyli pokazaliśmy, że $A \cdot B = \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot B_n)$. □

Przykład 13.6
Arytmetyka granic oznacza na przykład, że mając ciąg (przyjmujemy $d_n \neq 0$):

$$e_n = \frac{a_n \cdot b_n - c_n}{d_n}$$

możemy policzyć po prostu granice ciągów a_n, b_n, c_n, d_n (niech wynoszą one odpowiednio A, B, C, D, $D \neq 0$). Wtedy ciąg e_n ma granicę i wynosi ona $(A \cdot B - C)/D$.

[13] Taka formułka jest jedną z częściej spotykanych w dowodach z analizy. Skoro mamy coś pokazać dla każdego $\varepsilon > 0$, to piszemy ustalmy $\varepsilon > 0$, żeby mieć na myśli jakąś konkretną liczbę przez cały dowód, a na koniec i tak powiemy, że ε było ustalone, ale dowolne.

Definicja 13.7 (Granica niewłaściwa ciągu)
Mówimy, że ciąg (a_n) jest *rozbieżny* do $+\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall M \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq N \quad a_n > M.$$

Piszemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Analogicznie, ciąg (a_n) jest *rozbieżny* do $-\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall M \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq N \quad a_n < M.$$

Piszemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Fakt 13.8
Jeśli w ciągu (a_n) zmienimy lub pominiemy skończenie wiele wyrazów ciągu, to nie ma to wpływu na istnienie i wartość granicy.

Fakt 13.9
Załóżmy , że ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, $A = \lim_{n\to\infty} a_n$, $B = \lim_{n\to\infty} b_n$ oraz $a_n \leq b_n$ (odpowiednio $a_n \geq b_n$). Wtedy to $A \leq B$ (odpowiednio $A \geq B$).

Uwaga: jeśli w powyższym fakcie znak "$\leq$" zastąpimy w obu miejscach przez "$<$", to nie jest to prawda, patrz zadanie 21.

Twierdzenie 13.10 (Twierdzenie o trzech ciągach)
Jeżeli ciągi (a_n), (b_n), (c_n) spełniają warunek

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

oraz ciągi (a_n) i (c_n) są zbieżne do tej samej granicy g, to ciąg (b_n) też jest zbieżny i jego granicą jest g.

Powyższe twierdzenie możemy również zastosować do ciągów mających granice niewłaściwe. Wtedy formułujemy je następująco.

Twierdzenie 13.11 (Twierdzenie o dwóch ciągach)
Załóżmy, że ciągi (a_n), (b_n) spełniają warunek $a_n \leq b_n$. Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, to również $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Podobnie, $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ implikuje $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Fakt 13.12
Niech ciąg (a_n) będzie monotoniczny (niemalejący lub nierosnący). Wtedy:

1. jeśli (a_n) jest organiczony, to ma granicę.
2. jeśli (a_n) nie jest organiczony ma granicę niewłaściwą.

Dowód. Rozważmy tylko ciągi niemalejące. Niech (a_n) będzie takim ciągiem. Wtedy są dwie możliwości. Jeśli ciąg jest nieograniczony, to łatwo sprawdzamy, że jest rozbieżny do $+\infty$. Jeśli jest ograniczony, to $g = \sup\{a_n \ : \ n \in \mathbf{N}\}$ jest granicą takiego ciągu. Fakt ten wynika bezpośrednio z monotoniczności i definicji kresu (sprawdź!). $\square$

Uwaga 13.13
Warto pamiętać, że arytmetyka granic zachodzi też w niektórych przypadkach niewłaściwych, o ile nie dochodzimy do symboli nieoznaczonych takich jak:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0.$$

13.1.1. *Przykłady.*

Przykład 13.14

Kilka podstawowych granic:

- $\lim\limits_{n\to\infty} a = a$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$ dla $a > 1$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ dla $|a| < 1$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ nie istnieje,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ dla $a > 0$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Przykład 13.15

Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^4-n^2+1}{5n^5-n^3+1}+\frac{3n^4-2n^2+4}{5n^5-2n^3+8}+\frac{3n^4-3n^2+9}{5n^5-3n^3+27}+\ldots+\frac{3n^4-kn^2+k^2}{5n^5-kn^3+k^3}+\ldots+\frac{3n^4-2n^3+4n^2}{5n^5-2n^4+8n^3}\right) .$$

Rozwiązanie. Dana pod znakiem granicy suma ma $2n$ składników i zapisuje się wzorem

$$b_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{3n^4-kn^2+k^2}{5n^5-kn^3+k^3} .$$

Szacowanie od góry daje

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{3n^4-kn^2+k^2}{5n^5-kn^3+k^3} \le \sum_{k=1}^{2n} \frac{3n^4-0+4n^2}{5n^5-2n^4+0} = \frac{2n\left(3n^4+4n^2\right)}{5n^5-2n^4} = c_n .$$

Szacując od dołu otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{3n^4-kn^2+k^2}{5n^5-kn^3+k^3} \ge \sum_{k=1}^{2n} \frac{3n^4-2n^3+0}{5n^5-0+8n^3} = \frac{2n\left(3n^4-2n^3\right)}{5n^5+8n^3} = a_n .$$

Ponieważ dla dowolnego n zachodzą nierówności $a_n \le b_n \le c_n$, a ponadto

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 6//5 ,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 6//5 .$$

□

13.2. **Lista zadań.**

---

1. Dla $\varepsilon = 0,1$ znaljdź liczbę naturalną N taką, że

$$\left|\frac{3n-2}{n+1} - 3\right| < \varepsilon, \quad \text{dla } n \ge N.$$

Zrób to samo dla $\varepsilon = 0,001$ a potem dla dowolnej wartości $\varepsilon > 0$.

2. Udowodnij, że $g = 1$ jest granicą ciągu $a_n = \frac{1}{1+n}$, tzn. dla ustalonego $\varepsilon > 0$ znajdź N takie, że dla $n \geq N$ zachodzi:

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon.$$

3. Policz granice następujących ciągów (zbadaj też granice niewłaściwe):

(a) $$\frac{n}{n+7}$$

(b) $$\frac{4n^2+3n}{n+1}$$

(c) $$\frac{5n^3+n^2-6}{3n^4+7}$$

(d) $$\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$$

(e) $$n \cdot (-1)^n$$

(f) $$2^n - \frac{1}{n}$$

4. Wyjaśnij, dlaczego poniżej są same bzdury:

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = 0 \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} (-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ 1 & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}.$

5. Uzasadnij, że jeśli ciąg (a_n) ma granicę $A > 0$, to tylko skończenie wiele wyrazów ciągu może być ujemnych.

6. Uzasadnij, że jeśli ciągi (a_n) i (b_n) mają granice A i B oraz $d := B - A > 0$, to istnieje N takie, że

$$\forall n \geq N \quad b_n - a_n > d/2$$

Wskazówka: przyjrzyj się dowodowi faktu 13.3.

---

7. Wyprowadź z definicji zbieżności ciągu następujące równości:

(a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-2} = \frac{2}{3},$$

(b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2+1} = 0,$$

(c) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0,$$

(d) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-3n+1}{2n^2+n+1} = \frac{1}{2}.$$

8. Policz granice następujących ciągów (zbadaj też granice niewłaściwe):

(a) $$\frac{5n^4+n^2-6}{3n^4+7}$$

(b) $$\frac{5n^5+n^2-6}{3n^4+7}$$

(c) $$\frac{n}{1+\sqrt{n}}$$

(d) $$\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^7}{n^3(1+7\sqrt{n+2})}$$

(e) $$\frac{\sqrt{3^n+2^n}}{\sqrt{3^n+1}}$$

(f) $$\frac{7n + (\sqrt[3]{n}\sqrt[6]{n})^5\sqrt{9n+1}}{11n^3+7n+3}$$

9. Policz granice następujących ciągów (zbadaj też granice niewłaściwe):

(a)
$$\frac{1-2+3-4+5-6+...-2n}{\sqrt{n^2+2}}$$

(b)
$$\frac{1+2+4+...+2^n}{1+3+9+...+3^n}$$

(c)
$$\frac{1+2+3+...+n}{n^2}$$

(d)
$$\frac{3^0+3^1+3^2+3^3+...+3^n}{3^n}$$

(e)
$$\frac{n^2+1}{n^3+1}+\frac{n^2+2}{n^3+2}+\frac{n^2+3}{n^3+3}+...+\frac{n^2+n}{n^3+n}$$

(f)
$$\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+...+\frac{1}{(n+1)^2}$$

10. Policz granice następujących ciągów (zbadaj też granice niewłaściwe):

(a)
$$\sqrt[n^2]{n}$$

(b)
$$\sqrt[n]{n^2}$$

(c)
$$\sqrt[n]{n+17}$$

(d)
$$\frac{\sqrt{3^n+n^2}}{\sqrt{3^n+2^n+1}}$$

(e)
$$\sqrt{n^2+3n}-n$$

(f)
$$n(\sqrt{n^2+7}-n)$$

(g)
$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+7}-\sqrt{n}}$$

(h)
$$\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{(\sqrt{n^2+n+1}-n)^2}$$

(i)
$$\frac{1}{(2+(-1)^n)^n}$$

(j)
$$\frac{n^7}{7^n}$$

(k)
$$\frac{10^n}{n!}$$

(l)
$$\frac{n!}{n^{22}}$$

11. Oblicz wartość granicy
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{\sqrt{9^n+n^{2010}}}$$
lub uzasadnij, że granica nie istnieje.

12. Oblicz granicę
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^3+k}{n^4+(-1)^k\cdot k^2}\ .$$

13. Oblicz granicę
$$\lim_{n\to\infty}\left(n^3\cdot\sqrt{n^2+1}-n^4-\frac{n^2}{2}\right)\ .$$

14. Oblicz granicę
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{8n^2+1}}{\sqrt{2n^4+1}}+\frac{\sqrt{8n^2+2}}{\sqrt{2n^4+2}}+\frac{\sqrt{8n^2+3}}{\sqrt{2n^4+3}}+\frac{\sqrt{8n^2+4}}{\sqrt{2n^4+4}}+\ldots+\frac{\sqrt{8n^2+3n}}{\sqrt{2n^4+3n}}\right)\ .$$

15. Pokaż, że jeśli ciąg (a_n^2) jest zbieżny, to ciąg (a_n) nie musi być zbieżny. A jeśli ciąg (a_n^2) jest zbieżny do zera?

16. Pokaż, że jeśli nieujemny ciąg (a_n) jet zbieżny do $a>0$, to ciąg $(\sqrt{a_n})$ jest zbieżny do $\sqrt{a}$.

17. Załóżmy, że ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, $\lim_{n\to\infty}a_n=A>0$, $\lim_{n\to\infty}b_n=0$ oraz $b_n>0$. Udowodnij, że:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty.$$

18. Udowodnij punkt **1.** twierdzenia 13.5.

19. Udowodnij punkt **3.** twierdzenia 13.5.

20. Załóżmy, że (a_n) jest zbieżny i $\lim_{n\to\infty} a_n = g$. Udowodnij, że $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |g|$. Pokaż, że implikacja w drugą stronę nie zachodzi, tzn. podaj przykład ciągu (b_n), który nie jest zbieżny, ale $(|b_n|)$ już jest zbieżny.

21. Podaj przykład dwóch ciągów zbieżnych takich, że $a_n < b_n$ oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ (por. fakt 13.9).

22. Czy prawdziwe są następujące stwierdzenia:
- (a) Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są rozbieżne, to ciąg $(a_n + b_n)$ jest rozbieżny.
- (b) Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, a ciąg (b_n) rozbieżny, to ciąg $(a_n + b_n)$ jest rozbieżny.
- (c) Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, a ciąg (b_n) rozbieżny, to ciąg $(a_n b_n)$ jest rozbieżny.
- (d) Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, ciąg (b_n) rozbieżny, a ponadto obydwa ciągi mają tylko wyrazy dodatnie, to ciąg $(a_n b_n)$ jest rozbieżny.
- (e) Jeżeli (a_n) jest ciągiem zbieżnym o wyrazach dodatnich, to jego granica jest liczbą dodatnią.
- (f) Jeżeli $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{1}{2}$, to $a_n \to \frac{1}{2}$.
- (g) Jeżeli ciąg $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$ jest zbieżny, to ciąg (a_n) jest zbieżny.
- (h) Jeżeli ciąg (a_n^2) jest zbieżny, to ciąg (a_n) jest zbieżny.
- (i) Jeżeli wśród wyrazów ciągu (a_n) występują zarówno wyrazy dodanie jak i ujemne, to ciąg (a_n) jest rozbieżny.
- (j) Jeżeli wśród wyrazów ciągu (a_n) występują zarówno wyrazy mniejsze od 1 jak i większe od 3, to ciąg (a_n) jest rozbieżny.

23. Ciąg (a_n) spełnia warunek

$$\forall n > 1000 \quad |a_n - 100| < 10 \, .$$

Czy stąd wynika, że:
- (a) ciąg (a_n) jest zbieżny,
- (b) ciąg (a_n) jest rozbieżny,
- (c) $a_{1111} > 88$,
- (d) $\forall n > 345 \ |a_n - 100| < 17$,
- (e) $\forall n > 5555 \ |a_n - 99| < 13$,
- (f) ciąg (a_n) jest ograniczony,
- (g) $\exists n > 444 \ |a_n - 95| < 37$,
- (h) $\exists n > 4444 \ |a_n - 80| < 37$,
- (i) $\forall m \ \exists n > m \ a_n > 0$,
- (j) $\forall n > 1331 \ |a_n - 66| > 12$,
- (k) $\forall m > 1234 \ \ \forall n > 5678 \ |a_n - a_m| < 17$,
- (l) $\forall m > 1234 \ \ \forall n > 5678 \ |a_n - a_m| < 37$,
- (m) $\exists m < 123 \ \ \exists n < 456 \ |a_n - a_m| < 3$,
- (n) $\forall m > 12345 \ \ \forall n > 67890 \ |a_n + a_m| < 210$,
- (o) $\forall m > 1296 \ \ \forall n > 7776 \ |a_n + a_m| < 222$,
- (p) $\exists n \ a_n > 91$.

24. Dany jest taki ciąg (a_n), że

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \forall n \geq 5//\varepsilon \quad |a_n - 7| < \varepsilon \, .$$

- (a) Podaj granicę ciągu (a_n).
- (b) Wskaż taką liczbę M, że $\forall n \quad |a_n| < M$.
- (c) Wskaż taką liczbę N, że $\forall n \geq N \quad a_n > 6$.
- (d) Wskaż taką liczbę N, że $\forall n \geq N \quad a_n < 7{,}01$.
- (e) Wskaż taką liczbę N, że $\forall n \geq N \quad |a_n - 8| > 1//3$.

25. Które z poniższych warunków są równoważne zbieżności ciągu (a_n) do liczby g.
- (a) $\forall n \in \mathbf{N} \ \exists N \in \mathbf{N} \ \forall m \geq N \qquad |a_m - g| < \frac{1}{n}$,
- (b) $\forall n \in \mathbf{N} \ \exists N \in \mathbf{N} \ \forall m \geq 2^N \qquad |a_m - g| < \frac{1}{2^n}$.

26. Pokaż, że ciąg $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący i ograniczony z góry, a zatem zbieżny.

27. Znajdź granicę ciągu

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+...+\frac{2n-1}{2^n}.$$

28. Udowodnij, że dla $q\in(0,1)$ ciąg $a_n=q^n$ jest zbieżny do zera.

Wskazówka 1: Skorzystaj z tego, że $q^{n+1}=q\cdot q^n$ oraz q_n jest malejący i dodatni.

Wskazówka 2: Skorzystaj z nierówności Bernoulliego zapisując $1/q=1+r$ dla $r>0$.

29. Ciąg (a_n) jest zadany przez: $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$. Udowodnij, że ciąg jest zbieżny i policz jego granicę.

30. Oblicz granicę ciągu

$$a_n=\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\dots\sqrt[2^n]{2}.$$

31. Znajdź granice:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\dots\cos\frac{x}{2^n}\right)\qquad(0<x<\pi)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$$

32. Znajdź liczbę naturalną k taką, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2008}}{n^k-(n-1)^k}=\frac{1}{2009}.$$

33. Znajdź granice ciągów

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2},\qquad\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n.$$

34. Znajdź granice ciągów

$$n^{\frac{1}{n^2}},\qquad n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

35. Niech (q_n) będzie ciągiem liczb wymiernych dodatnich, a (a_n), (b_n) - ciągami liczb naturalnych, takich że

$$q_n=\frac{a_n}{b_n},\qquad\lim_{n\to\infty}q_n=x\notin\mathbf{Q}.$$

Pokaż, że $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$.

36. Znajdź granice ciągów:

$$a_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)...\left(1-\frac{1}{2^n}\right),\qquad b_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)...\left(1+\frac{1}{2^n}\right).$$

Wskazówka: $a_n\cdot b_n<1$. Ponadto: $1-2^n\geq\frac{\xi_n}{\xi_{n-1}}$ dla $\xi_n=1+\frac{2}{n-1}$ oraz $n\geq3$.

37. Zakładamy, że ciąg b_n jest zbieżny. Czy ciąg $c_n=n(b_n-b_{n-1})$ może być rozbieżny do $+\infty$?

14. CIĄGI ZADANE REKURENCJAMI

14.1. **Wprowadzenie.** Rekurencyjne zdefiniowanie ciągu polega na tym, że podajemy pierwszy (lub kilka pierwszych wyrazów) i podajemy formułę, która mówi nam jak wyliczać kolejne wyrazy za pomocą wcześniejszych. Zacznijmy od omówienia ciągów arytmetycznych i geometrycznych.

Ciąg arytmetyczny. Jest to ciąg, w którym różnica pomiędzy dwoma kolejnymi wyrazami jest stała. Przykłady takich ciągów:

$$1, 2, 3, 4, ...$$
$$10, 23, 36, 49, ...$$
$$\pi, -\pi, -3\pi, -5\pi, ...$$
$$7, 7, 7, 7, ...$$

Rekurencyjnie ciągi arytmetyczne mają postać.

$$\begin{cases} a_1 &= A \\ a_{n+1} &= a_n + B, \quad n = 1, 2, ... \end{cases}$$

Łatwo zauważyć i udowodnić, że z powyzszego określenia ciągu wynika, że

$$a_n = A + (n-1)B, \qquad n = 1, 2, ...,$$

gdzie A jest pierwszym wyrazem, a B jest różnicą pomiędzy kolejnymi wyrazami. Czasem będzie nas dodatkowo interesować suma $S_n = a_1 + ... + a_n$. Jako jedno z zadań udowodnimy, że

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Ciąg geometryczny. Jest to ciąg, w którym każdy kolejny wyraz powstaje przez pomnożenie poprzedniego przez ustalony czynnik. Przykłady takich ciągów:

$$1, 2, 4, 8, ...$$
$$9, , -3, 1, 1/3, ...$$
$$5, 0, 0, 0, ...$$

Rekurencyjnie ciągi geometryczne mają postać.

$$\begin{cases} a_1 &= A \\ a_{n+1} &= B \cdot a_n, \quad n = 1, 2, ... \end{cases}$$

Nietrudno stąd wywnioskować, że

$$a_n = A \cdot B^{n-1}, \quad n = 1, 2, ...,$$

gdzie A jest pierwszym wyrazem, a B jest ilorazem pomiędzy kolejnymi wyrazami[14]. Dla ciągu geometrycznego w którym $B \neq 1$[15] suma $S_n = a_1 + ... + a_n$ jest zadana wzorem

$$S_n = A\frac{B^{n+1} - 1}{B - 1}, \qquad n = 1, 2, ..., .$$

Rekurencje liniowe stopnia 1. Ciągi arytmetyczne i geometryczne są szczególnymi przypadkami rekurencji liniowych stopnia 1, które mają postać:

$$\begin{cases} a_1 &= A \\ a_{n+1} &= B \cdot a_n + C, \quad n = 1, 2, ... \end{cases}$$

[14] Zasadniczo będziemy się zajmować tylko ciągami, których wszystkie wyrazy są niezerowe.

[15] jeśli $B = 1$, to jest oczywiście łatwo

W zadaniach poniżej wyznaczymy rozwiązanie ogólne takiej rekurencji.

Rekurencje liniowe stopnia 2. Czasem zdarza się, że wzór rekurencyjny odwołuje się do dwóch ostatnich wyrazów ciągów[16]. Wtedy, aby dobrze określić ciąg potrzebujemy podać dwa pierwsze wyrazy ciągu. Najsłynniejszym przykładem takiego ciągu jest ciąg Fibbonacciego zadany przez rekurencje:

$$\begin{cases} f_1 & = 1 \\ f_2 & = 1 \\ f_{n+2} & = f_{n+1} + f_n, \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Aby nauczyć się rozwiązywać rekurencje liniowe rzędu 2 zbadajmy najpierw następujący przykład.

Przykład 14.1
Rekurencja

$$\begin{cases} a_1 & = 1 \\ a_2 & = 5 \\ a_{n+2} & = a_{n+1} + 2a_n, \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

ma rozwiązanie

$$a_n = (-1)^n + 2^n.$$

Dowód. Ciąg ten ma wyrazy: $1, 5, 7, 17, 31, 65, 127, \ldots$. Jeśli się dokładniej przyjrzymy, to zobaczymy, że wyrazy te są niedalekie od potęg dwójki i możemy zgadnąć rozwiązanie (a potem indukcyjnie udowodnić, że to jest rozwiązanie). My jednak postąpimy inaczej, żeby poznać metodę. Zastanówmy się jakie funkcje postaci x^n mogą spełniać rekurencję (bez warunków początkowych). Musi zachodzić $x^{n+2} = x^{n+1} + 2x^n$, co sprowadza się do tzw. równania charakterystycznego rekurencji:

$$x^2 = x + 2.$$

To równanie ma dwa rozwiązania: $x = -1$ i $x = 2$. Czyli ciągi $(-1)^n$ oraz 2^n spełniają rekurencje. Jeśli przyjrzymy się bliżej, to dla dowolnych stałych c_1 i c_2 ciąg:

$$a_n = c_1(-1)^n + c_2 2^n$$

również spełnia rekurencję (sprawdź!). Ponieważ c_1 i c_2 mzemy wybrać dowolnie, to wystarczy je tak ustalić, żeby zgadzały się również warunki początkowe dla $n = 1$ i $n = 2$. To prowadzi do układu równań:

$$\begin{cases} 1 = a_1 = -c_1 + 2c_2 \\ 5 = a_2 = c_1 + 4c_2 \end{cases}$$

Po rozwiązaniu dostajemy $c_1 = c_2 = 1$ i rozwiązanie rekurencji:

$$a_n = (-1)^n + 2^n.$$

□

Wróćmy na chwilę do ciągu Fibbonacciego. Możemy zastosować tę samą metodę, aby dostać wzór Bineta (sprawdzenie tego będzie jednym z zadań) na n-ty wyraz ciągu Fibonacciego:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

[16] Oczywiście może się też odwoływać do większej liczby poprzednich wyrazów.

Równanie charakterystyczne stopnia 2 dla rekurencji liniowych jest równaniem kwadratowym, więc nie zawsze będziemy mieli dwa pierwiastki rzeczywiste z których dostaniemy rozwiązanie. W przypadku jednego pierwiastka (podwójnego) lub braku pierwiastków (czyli dwóch pierwiastków zespolonych) trzeba lekko zmodyfikować tę metodę, ale to już zobaczymy na przykładach później.

14.2. **Lista zadań.**

---

1. Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych w podanym ciągu $(13, 16, 19, ...)$.
2. Znajdź sumę wszystkich liczb trzycyfrowych podzielnych przez 7.
3. 76 płyt ustawiona na trzech półkach. Liczba płyt na półce dolnej, środkowej i górnej tworzą ciąg geometryczny. Ile płyt znajduje się na poszczególnych półkach?
4. *Dywan Sierpińskiego* to figura, która powstaje z kwadratu w następujący sposób, w pierwszym etapie należy podzielić kwadrat na 9 mniejszych kwadratów i usunąć środkowy z nich, w następnym etapie postępujemy podobnie tzn. dzielmy każdy z pozostałych kwadratów na 9 kwadratów i usuwamy środkowy itd. Przyjmując długość pierwszego kwadratu 1, oblicz pole pozostałej części tego kwadratu po piątym etapie.
5. Znajdź rozwiązanie rekurencji:

$$\begin{cases} a_1 & = 1 \\ a_{n+1} & = 2 \cdot a_n + 1, \quad n = 1, 2, ... \end{cases}$$

---

6. Jaka jest największa możliwa liczba obszarów wyznaczonych przez n prostych na płaszczyźnie?
7. Dla każdego $n \geq 1$ niech j_n oznacza liczbę sposobów ułożenia n identycznych kostek domina o wymiarach 2cm x 1cm na prostokącie o wymiarach 2cm x n cm. Znaleźć zależnośść rekurencyjną dla j_n.
8. Dla każdego $n \geq 1$ niech t_n oznacza liczbę ciągów długości n zbudowanych z symboli a, b, c, w których dwie samogłoski nie występują obok siebie. Znaleźć zależność rekurencyjną dla t_n.
9. Dla każdego $n \geq 1$ niech s_n oznacza liczbę sposobów, na które można wciągnąć flagi trzech kolorów na n-metrowy maszt, zakładając, że flagi czerwone mają szerokość 2m, a pozostałe flagi 1m. Znaleźć zależność rekurencyjną dla s_n.
10. *Wieże z Hanoi.* "U zarania czasu Bóg umieścił 64 złote krążki na pierwszej z trzech diamentowych iglic tak, że krążki wyżej umieszczone miały mniejsze promienie. Następnie Bóg polecił grupie mnichów przełożenie tych krążków na trzecią iglicę, ale tak by:
- w jednym ruchu przenosić tylko jeden krążek,
- krążek większy nigdy nie może leżeć na krążku mniejszym,
- można posługiwać się środkową iglicą."

(a) Pokaż jak przełożyć 4 krążki?
(b) Ile minimalnie ruchów potrzeba, żeby przenieść n krążków? Jak mają się do siebie minimalna liczba ruchów dla $n - 1$ i n krążków?
(c) Mnisi pracują od zarania dziejów dzień i noc. Ile czasu im to zajmie, jeśli jednej doby przenoszą jeden krążek?

11. Ciąg a_n zadany jest rekurencyjnie: $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$ dla $n \geq 1$. Udowodnij, że $a_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$.

12. Znajdź wzór na ciąg Fibbonacciego.

13. Rozwiąż rekurencję:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 0 \\ a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n \end{cases}$$

14. Rozwiąż rekurencję:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = -1 \\ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n + 20 \end{cases}$$

15. Rozwiąż rekurencję:

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_2 = -5 \\ a_{n+2} = -a_n \end{cases}$$

16. Rozwiąż rekurencję:

$$\begin{cases} a_1 = 4\sqrt{2} \\ a_2 = 4 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - \sqrt{2}a_n \end{cases}$$

17. Rozwiąż rekurencję:

$$\begin{cases} a_1 = -11\sqrt{2} \\ a_2 = -3 \\ a_3 = -43 \\ a_{n+3} = a_{n+2} + 8a_{n+1} + 12a_n \end{cases}$$

18. Znajdź ciągi u_n, t_n, jeśli:

$$\begin{cases} t_0 = 2 \\ u_0 = 3 \\ t_{n+1} = 6t_n + 4u_n \\ u_{n+1} = t_n + 3u_n. \end{cases}$$

Wskazówka: Wyprowadź rekurencję tylko dla jednego ciągu.

---

19. (Sortowanie przez łączenie). Mamy 2^n monet, każda innej wagi. Dysponujemy wagą szalkową bez odważników. Naszym zadaniem będzie ułożenie wszystkich monet w kolejności od najcięższej do najlżejszej. Będziemy to robili w następujący sposób. Najpierw podzielimy monety na dwie części po 2^{n-1} monet. Następnie każdą z tych części uporządkujemy od najcięższej do najlżejszej. Potem porównamy najcięższe monety z obu części i cięższą z nich odłożymy jako najcięższą ze wszystkich. Potem porównamy najcięższe monety obu części (jedna z tych części jest teraz mniejsza, ubyła z niej jedna moneta). Cięższą monetę odkładamy na bok jako drugą z kolei. I tak dalej. Trzeba jeszcze wyjaśnić, w jaki sposób porządkujemy obie części. Otóż zrobimy to w taki sam sposób.

20. Znajdź wzór ogólny ciągu:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1}, \qquad x_0 = 1.$$

Wskazówka: Zapisz $x_n = \frac{a_n}{b_n}$ i znajdź układ rekurencji liniowych na a_n i b_n. Rozwiąż.

21. Znajdź wzór ogólny na ciąg:

$$y_{n+1} = \frac{y_n^2 + 2}{2y_n}, \qquad y_0 = 1.$$

22. Pokaż, że $y_n = x_{2^n=1}$ (ciągi z dwóch poprzednich zadań).

23. Zbadać zbieżność ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie:

$$a_{n+1} = 5\frac{3a_n + 1}{2a_n + 6},$$

gdzie $a_1 \in (1, \infty)$. *Wskazówka:* Należy wykazać ograniczoność i monotoniczność ciągu.

24. Zbadać zbieżność ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie:

$$a_{n+1} = \frac{1}{4a_n + 1},$$

gdzie $a_1 \in (1, \infty)$. *Wskazówka:* Należy rozłożyć ciąg na dwa podciągi ograniczone i monotoniczne.

15. FUNKCJE: GRANICE I CIĄGŁOŚĆ

15.1. **Wprowadzenie.** W tym rozdziale rozważać będziemy funkcje określone na pewnej dziedzinie D_f (np.: prosta, półprosta, przedział, suma przedziałów, itp.). Interesować nas będą dwa, mocno ze sobą związane, pojęcia granicy funkcji i ciągłości funkcji.

Definicja 15.1 (Granica funkcji w punkcie - definicja Heinego)
Niech dana będzie funkcja $f : D_f \to \mathbf{R}$ oraz punkt $x_0 \in \mathbf{R}$. Mówimy, że funkcja f ma granicę g w punkcie x_0, jeśli dla każdego ciągu (x_n), takiego że $x_n \in D_f$, $x_n \neq x_0$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g.$$

Jeśli powyższy warunek zachodzi, to zapisujemy to

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g.$$

Intuicyjnie, jeśli $\lim_{x\to x_0} f(x) = g$, to "zbliżając się" z punktem x do x_0 wartości funkcji $f(x)$ "zbliżają się" do liczby g. Zauważmy, że punkt x_0 może nie należeć do dziedziny funkcji, ale definicja ma sens jedynie gdy istnieją ciągi punktów z dziedziny zbieżne do punktu x_0. Typowym przykładem może być punkt $x_0 = 1$, gdy dziedziną jest np. $(1, \infty)$ lub $(0, 1) \cup (1, 2)$. Zauważmy też, że nawet jeśli x_0 należy do dziedziny, to wartość $f(x_0)$ nie ma żadnego znaczenia dla powyższej definicji. Inaczej jest w definicji ciągłości - tutaj wartość $f(x_0)$ ma kluczowe znaczenie.

Definicja 15.2
Niech dana będzie funkcja $f : D_f \to \mathbf{R}$ oraz punkt $x_0 \in D_f$. Mówimy, że funkcja f jest ciągła w punkcie x_0, jeśli dla każdego ciągu (x_n), takiego że $x_n \in D_f$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Jak widać definicje te są mocno ze sobą związane. Można to zapisać w następującej formie.

Fakt 15.3
Niech f i $x_0 \in D_f$ będą jak wyżej. Wtedy f jest ciągła w punkie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{x\to x_0} f(x)$ istnieje i jest równa $f(x_0)$.

Czasem przy badaniu granic funkcji wygodne jest rozpatrzenie dwóch przypadków: gdy x-y dążą do x_0 "z prawej strony" (czyli $x > x_0$) oraz "z lewej strony" (czyli $x < x_0$). Jeśli w definicji 15.1 założymy, że ciągi $x_n \in D_f$ spełniają $x_n > x_0$ (alternatywnie $x_n < x_0$), to mówimy, że granica jest prawostronna (lewostronna) i zapisujemy to

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = g \qquad (\lim_{x\to x_0^-} f(x) = g).$$

Definicja 15.4 (Granica funkcji w punkcie - definicja Cauchy'ego)
Niech dana będzie funkcja $f : D_f \to \mathbf{R}$ oraz punkt $x_0 \in \mathbf{R}$. Mówimy, że funkcja f ma granicę g w punkcie x_0, jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D_f \quad (0 < |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \; |f(x) - g| < \varepsilon)\,.$$

Podobnie można sformułować definicję ciągłości w wersji Cauchy'ego. Okazuje się, że definicje Heinego i Cauchy'ego są sobie równoważne (zarówno definicje granicy jak i ciągłości).

15.2. **Lista zadań.**

15.2.1. *Zadania.*

1. Naszkicuj wykres funkcji f danej wzorem

(a) $\mathrm{sgn}(\sin x)$

(b) $\{x\} - (\{x\})^2$

(c) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 0 \\ x & \text{dla} \quad 0 \le x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{dla} \quad 1 \le x < 3 \\ 4 - x & \text{dla} \quad x \ge 3 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x \ne 2 \\ \mathrm{sgn}(x) & \text{dla} \quad x = 2 \end{cases}$

(e) $\dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

(f) $\dfrac{1}{\{x\}}$

(g) $\mathrm{sgn}(x^3 - x)$

(h) $x^3 \mathrm{sgn}(x)$

(i) $\left| \left[x + \frac{1}{2} \right] - x \right|$

(j) $f(x) = |x^2 - 1| - |x^2 - 4|$

(k) $f(x) = |x^2 - 8x + 15|$

(l) $f(x) = x^2 + x + 2 - |x^2 - x - 2|$

(m) $f(x) = \{\cos x\}$

(n) $f(x) = [\frac{4}{\pi} \mathrm{arctg} x]$

(o) $f(x) = 2\{\sin x\} - \{2 \sin x\}$

(p) $f(x) = [x] + x$

(q) $f(x) = \{x\} + x$

(r) $f(x) = \left[\left| x - \frac{1}{2} \right| \right]$

2. Oblicz następujące granice:

(a)
$$\lim_{x \to 7} \left(\frac{1}{x - 7} - \frac{8}{x^2 - 6x - 7} \right)$$

(b)
$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$$

(c)
$$\lim_{x \to 0} e^{-1/x^2}$$

(d)
$$\lim_{x \to 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}$$

(e)
$$\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{x + 2}$$

(f)
$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5}$$

(g)
$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right)$$

(h)
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^{2008} - 1}{x^{10} - 1}$$

(i)
$$\lim_{x \to 1/2} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$$

(j)
$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$$

(k)
$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

(l)
$$\lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)\sqrt{2 - x}}{x^2 - 1}$$

(m)
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$$

(n)
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

(o)
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

(p)
$$\lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{1 + \ln x}$$

(q)
$$\lim_{x \to 0+} \frac{2^{1/x} + 1}{2^{1/x} - 1}$$

(r)
$$\lim_{x \to 0-} \frac{2^{1/x} + 1}{2^{1/x} - 1}$$

(s)
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2^{1/x} - 1}{2^{1/x} + 1}$$

3. Dla których wartości parametrów a, b funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{dla} \quad x<1 \\ x^2 & \text{dla} \quad 1\le x<2 \\ ax-b & \text{dla} \quad 2\le x \end{cases}$$

jest ciągła? Naszkicować wykres funkcji f dla każdej pary parametrów (a, b), dla których funkcja f jest ciągła.

4. Dla których wartości parametrów a, b funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{dla} \quad x<1 \\ x^2+ax+b & \text{dla} \quad 1\le x<2 \\ x+3 & \text{dla} \quad 2\le x \end{cases}$$

jest ciągła? Naszkicować wykres funkcji f dla każdej pary parametrów (a, b), dla których funkcja f jest ciągła.

5. Do podanych f, x_0 i ε dobrać takie δ, aby

$$\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta) \qquad |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

(a) $f(x)=2x$, $x_0=5$, $\varepsilon=1/10$
(b) $f(x)=1/x$, $x_0=4$, $\varepsilon=1/100$
(c) $f(x)=x^2$, $x_0=1$, $\varepsilon=1/50$
(d) $f(x)=x^3$, $x_0=0$, $\varepsilon=1/1000$
(e) $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=30$, $\varepsilon=1/10$
(f) $f(x)=x^4$, $x_0=10$, $\varepsilon=10^{-10}$

6. Wskaż taką liczbę M, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$|f(x)|\le M\ .$$

(a)
$$f(x)=\frac{2x^4+13x^2+7}{5x^4+x^2+2}$$

(b)
$$f(x)=\frac{5x^4+x^2+2}{2x^4+13x^2+7}$$

(c)
$$f(x)=e^{\sin x}$$

(d)
$$f(x)=\frac{x}{x^4+3}$$

(e)
$$f(x)=\frac{x^{1000}}{2^{|x|}}$$

16. RACHUNEK RÓŻNICZKOWY

16.1. **Wprowadzenie.** Dana jest funkcja f oraz punkt x należący do dziedziny f wraz z pewnym przedziałem $(x-\delta, x+\delta)$. Pochodną funkcji f w punkcie x nazywamy granicę

$$f'(x) = \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}, \tag{16.1}$$

o ile ta granica istnieje. W przeciwnym wypadku mówimy, że pochodna nie istnieja w punkcie x. Wprowadzając podstawienie $y = x+h$ możemy pochodną liczyć w podobny sposób

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(f(x+h)-f(x)\right).$$

Zauważmy, że pochodna w każdym punkcie jest liczbą (równą tangensowi nachylenia stycznej do osi Ox), więc jeśli rozważymy pochodną we wszystkich punktach, w których ona istnieje, to dostaniemy nową funkcję $f'(x)$ z funkcji $f(x)$.

Przykład 16.1
Dla $f(x) = x^2$ policzymy $f'(7)$, a następnie $f'(x)$ dla dowolnego x.

Rozwiązanie. Mamy

$$f'(7) = \lim_{x\to 7} \frac{x^2-49}{x-7} = \lim_{x\to 7}(x+7) = 14.$$

oraz

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x.$$

□

Jeśli zdarzy się, że funkcja jest określona w punkcie x i tylko z jednej strony tego punktu (np. $\sqrt{x}$ w $x=0$) lub granica (16.1) istnieje tylko jako granica jednostronna, to mówimy o pochodnych jednostronnych. Tak więc jeśli f jest określona na $[x, x+\delta)$, to jej pochodna prawostronna jest dana wzorem

$$f'(x^+) = \lim_{y\to x^+} \frac{f(y)-f(x)}{y-x},$$

o ile ta granica istnieje.

Intuicyjnie pochodna $f'(x)$ mówi o tym jak szybko funkcja rośnie/maleje w punkcie x. Jeśli w pewnym punkcie x pochodna $f'(x)$ wynosi a to oznacza, że funkcja rośnie/maleje tak jak funkcja liniowa $y = ax$. Przy okazji zauważmy, że funkcja liniowa $f(x) = ax$ ma w każdym punkcie pochodną równą a.

Fakt 16.2 (Pochodne podstawowych funkcji)
Niech x będzie zmienną oraz $a \in \mathbb{R}$. Zachodzą następujące wzory:

$$\begin{aligned}
&(x)' = 1,\\
&(x^a)' = ax^{a-1},\\
&(\sin x)' = \cos x,\\
&(\cos x)' = -\sin x,\\
&(\ln x)' = \frac{1}{x},\\
&(e^x)' = e^x.
\end{aligned}$$

Dowód. Pierwszy wzór jest oczywisty. Drugi wzór działa dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ (ujemne, ułamkowe, niewymierne), ale my pokażemy dowód dla $a \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k h^{n-k} = \lim_{h\to 0} \left(\binom{n}{n-1} x^{n-1} + h\,(\ldots) \right) = nx^{n-1}.$$

Przejdźmy do pochodnej sinusa. Ze wzoru na sinus sumy, używając znanych granic trygonometrycznych,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \right) = \cos x.$$

Podobnie postępujemy z cosinusem. Następnie, dla $x > 0$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \ln \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h} = \lim_{h\to 0} \ln \left(\left(1 + \frac{1}{x/h}\right)^{x/h} \right)^{1/x} = \ln e^{1/x} = 1/x.$$

I jeszcze:

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

□

Twierdzenie 16.3 (Arytmetyka pochodnych)
Niech f i g będą dwiema funkcjami różniczkowalnymi, a c stałą rzeczywistą.

1. $$(cf(x))' = cf'(x),$$
2. $$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x),$$
3. $$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$
4. $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2},$$
5. $$(g(f(x)))' = f'(g(x))g'(x).$$

Poniższy fakt zbiera wiele ważnych zastosowań pochodnej. Zanim go sformułujemy zauważmy jeszcze, że $f'(x)$ na każdym odcinku, na którym jest zdefiniowana jest funkcją, której pochodną również można policzyć (jeśli istnieje). W ten sposób mamy zdebiniowaną drugą pochodną $f''(x)$ (i dalsze, które oznaczamy $f^{(n)}(x)$). I jeszcze kilka definicji:

- *punktem ekstremalnym* nazywamy punkt x, w którym $f'(x) = 0$,
- *maximum (minimum) lokalnym* nazywamy punkt x_0, taki że $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$) dla x-ów z pewnego otoczenia x_0 (czyli przedziału $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ i $\varepsilon > 0$),
- *ekstremum lokalnym* nazywamy punkt, który jest maximum lokalnym lub minimum lokalnym.

Fakt 16.4 (Własności pochodnych)
Zakładamy, że f jest funkcją zdefiniowaną na odcinku otwartym (lub sumie odcinków).

1. Funkcja różniczkowalna jest ciągła.

2. Styczna do wykresu funkcji f w punkcie x_0 zadana jest równaniem

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

3. Jeśli $f'(x) > 0$ ($f'(x) \geq 0$), to funkcja f jest rosnąca (niemalejąca).
4. Jeśli $f'(x) < 0$ ($f'(x) \leq 0$), to funkcja f jest malejąca (nierosnąca).
5. Jeśli $f'(x) = g'(x)$ na odcinku (a, b), to $f(x) = g(x) + c$ na tym odcinku.
6. Jeśli funkcja ma ekstremum lokalne w punkcie x_0, to x_0 jest punktem krytycznym ($f'(x_0) = 0$).
7. Jeśli $f''(x) > 0$ ($f''(x) \geq 0$), to funkcja f jest ściśle wypukła (wypukła).
8. Jeśli $f''(x) < 0$ ($f''(x) \leq 0$), to funkcja f jest ściśle wklęsła (wklęsła).

Jest naturalne, że punkty ekstremalne i punkty krytyczne są szczególnie interesujące. Pozwala to między innymi poznać przybliżony przebieg funkcji i rozwiązywać zagadnienia optymalizacyjne. Rozdział ten zakończymy jeszcze dwoma ważnymi twierdzeniami.

Twierdzenie 16.5 (Twierdzenie Rolle'a)
Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą mającą pochodną w każdym punkcie przedziału (a, b) oraz $f(a) = f(b)$. Wtedy istnieje $t \in (a, b)$, takie że

$$f'(t) = 0.$$

Dowód. Załóżmy, że f spełnia założenia twierdzenia oraz, że nie jest stała. Wiemy, że funkcja ciągła na odcinku domkniętym $[a, b]$ przyjmuje swoje maksimum i minimum w pewnych punktach. Przynajmniej jedno z tych dwóch ekstremów musi być poza końcami, załóżmy bez straty ogólności, że maksimum jest w punkcie $t \in (a, b)$. Wiemy, że pochodna $f'(t)$ istnieje, więc granica

$$\lim_{x \to t} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} = C$$

dla pewnej liczby C. Skoro t jest punktem maksimum, to zawsze $f(x) - f(t) \leq 0$. Rozważmy teraz tylko $x > t$. Dla takich x iloraz różnicowy jest niedodatni, więc i pochodna prawostronna jest niedodatnia. Podobnie, rozważając $x < t$, pochodna lewostronna jest nieujemna. Ale przecież pochodna istnieje, więc musi być $f'(t) = 0$. □

Twierdzenie 16.6 (Twierdzenie Lagrange'a)
Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą mającą pochodną w każdym punkcie przedziału (a, b). Wtedy istnieje $t \in (a, b)$, takie że

$$f'(t) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dowód. Rozważmy funkcję pomocniczą

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Ta funkcja spełnia założenia twierdzenia Rolle'a (jest ciągła na $[a, b]$ oraz różniczkowalna na (a, b)) oraz $g(a) = g(b)$ (sprawdź). Zatem istnieje $t \in (a, b)$ takie, że $g'(t) = 0$. Teraz wystarczy zauważyć, że dla $x \in (a, b)$ mamy

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

co daje tezę twierdzenia w punkcie t. □

16.2. **Lista zadań.**

1. Niech $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Korzystając **z definicji** pochodnej obliczyć $f'(8)$.

2. Niech $f(x) = x^5$. Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na $f'(x)$.

3. Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\ .$$

4. Oblicz pochodną funkcji o podanym wzorze. Na jakim zbiorze pochodna istnieje?

(a) $$x^7 + x^6 - 3x^3 + 4x^2 + 5x + \pi,$$

(b) $$\frac{x^2+1}{x^2-3},$$

(c) $$\frac{1-x^3}{1+x^3},$$

(d) $$(x^5+1)^{20},$$

(e) $$\frac{1}{\sqrt{1-x^4-x^8}},$$

(f) $$\operatorname{sgn}(x^5 - x^3),$$

(g) $$\ln(\cos(x))$$

(h) $$e^{x^3},$$

(i) $$2^x + 3^x + e^x,$$

(j) $$2^{x+3},$$

(k) $$x^2(x+1)e^x,$$

(l) $$e^{e^x},$$

(m) $$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10},$$

(n) $$\sqrt{x + \sqrt{x}}$$

5. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wyznacz równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $P = (0, 1)$.

6. Równanie $x^2 + y^2 = 5$ opisuje okrąg o promieniu $\sqrt{5}$. Znajdź równanie stycznej do tego okręgu w punktach $(1, 2)$ oraz $(-2, 1)$.

7. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^3$, która przecina oś Ox w jednym punkcie: $(-4, 0)$.

8. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność

$$x^4 - x^2 - 2x + 3 > 0.$$

9. Wyprowadź wzór na pochodną funkcji

$$f(x) = \frac{7 + \sin^4 x - \sin^2 x}{7 + \cos^4 x - \cos^2 x}\ .$$

Doprowadzić wzór na pochodną do możliwie najprostszej postaci.

10. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 + 2xe^x - e^{2x}}{x^3} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ A & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Dla której wartości parametru A istnieje $f'(0)$ i ile jest równa?

11. Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji $x^3 + 3|x| + 2$ na przedziale $[-1, 1]$.

12. Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji $\frac{2x}{x^2+1}$ na przedziale $[-2, 2]$.

13. Wyznacz punkty na sinusoidzie, w których funkcja zmienia się z wypukłej na wklęsłą.

14. Zbadaj wypukłość funkcji

$$f(x) = \sqrt{x+1}.$$

15. Wykaż nierówności

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \quad (x \neq 0).$$

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6} \quad (x > 0).$$

$$e^x \geq \left(\frac{ex}{n}\right)^n \quad (x \geq 0).$$

16. Rozpatrujemy wszystkie prostopadłościany o objętości 8, których stosunek długości dwóch krawędzi wychodzących z tego samego wierzchołka jest równy 1:2 oraz suma długości wszystkich dwunastu krawędzi jest mniejsza od 28. Wyznacz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jako funkcję długości jednej z jego krawędzi. Wyznacz dziedzinę tej funkcji. Oblicz wymiary tego spośród rozpatrywanych prostopadłościanów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze.

17. Rozważamy wszystkie graniastosłupy prawidłowe trójkątne o objętości $V = 2$. Wyznacz długości krawędzi tego z rozważanych graniastosłupów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole.

18. Jakie powinny być wymiary puszki w kształcie walca o pojemności 108π, aby do jej produkcji zużyć jak najmniej blachy? Grubość blachy należy zaniedbać.

19. Rozpatrujemy wszystkie stożki, których przekrojem osiowym jest trójkąt o obwodzie 20. Oblicz wysokość i promień podstawy tego stożka, którego objętość jest największa. Oblicz objętość tego stożka.

20. Rozpatrujemy wszystkie stożki, w których suma długości tworzącej i promienia podstawy jest równa 2. Wyznacz wysokość tego spośród rozpatrywanych stożków, którego objętość jest największa. Oblicz tę objętość.

21. Rozpatrujemy wszystkie walce, których pole powierzchni całkowitej jest równe 2π. Oblicz promień podstawy tego walca, który ma największą objętość. Podaj tę największą objętość.

22. Niech R będzie prostokątem leżącym w pierwszej ćwiartce, którego podstawa leży na osi OX, jeden z wierzchołków znajduje się w początku układu, a przeciwny wierzchołek leży na wykresie funkcji $y = e^{-x}$.

(a) Pokazać, że dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ pole R jest mniejsze niż ε, jeśli podstawa prostokąta jest odpowiednio duża.

(b) Pokazać, że prostokąt o największym możliwym polu ma podstawę równą 1.

23. Trójkąt prostokątny T leży w pierwszej ćwiartce. Przyprostokątne znajdują się na osiach, a przeciwprostokątna jest styczna do wykresu $y = e^{-x}$.

(a) Pokazać, że dla $\varepsilon > 0$ pole trójkąta T jest mniejsze niż ε jeśli podstawa jest odpowiednio duża.

(b) Pokazać, że podstawa trójkąta o największym polu jest równa 2.

24. Załóżmy, że $|f'(x)| \leq M$ dla $x \in (a, b)$. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a pokaż, że $|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$, czyli

$$f(a) - M(b - a) \leq f(b) \leq f(a) + M(b - a).$$

25. Korzystając z poprzedniego zadania oszacuj liczby: $\sqrt{101}$, $28^{2/3}$, $33^{1/5}$.

26. Dla jakich wartości parametru a parabola $y = ax^2$ jest styczna do krzywej $y = \ln x$.

27. Podać (z wyprowadzeniem i uzasadnieniem poprawności) przykład takiego wielomianu $W(x)$ stopnia trzeciego o współczynnikach całkowitych, że funkcja $f(x) = W(\{x\})$ jest różniczkowalna.

28. Liczby rzeczywiste $c_0, c_1, ..., c_n$ spełniają zależność

$$c_0 + \frac{c_1}{2} + ... + \frac{c_n}{n+1} = 0.$$

Pokaż, że wielomian $c_n x^n + ... + c_1 x + c_0$ ma przynajmniej jeden pierwiastek pomiędzy 0 i 1.

29. Załóżmy, że wielomian $P(x)$ stopnia n ma maksymalnie dużo, czyli n pierwiastków rzeczywistych. Pokaż, że pochodne P też mają tę własność.

30. Zbadaj przebieg zmienności funkcji i sporządź wykres

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 4}.$$

17. SZEREGI LICZBOWE

17.1. **Wprowadzenie.** Dodawanie jest działaniem dwuargumentowym. Mając dwie liczby znamy ich sumę. Ogólniej, dla skończonego układu liczb mamy jego sumę. Jeśli próbujemy dodać nieskończenie wiele liczb napotykamy naturalne trudności. Suma nieskończenie wielu jedynek nie może być żadną liczbą rzeczywistą. Co więcej - dodając

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...$$

też przekroczymy dowolną liczbę rzeczywistą (zob. przykład 17.3). Jeszcze większy problem możemy mieć dodając nieskończenie wiele liczb dodatnich i ujemnych. Tutaj może okazać się, że wynik zależy od kolejności (!) sumowania - zob. problem 7.

Aby zrozumieć na czym polega nieskończone dodawanie posłóżymy się granicami ciągów.

Definicja 17.1 (Zbieżność szeregu)
Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny do liczby S, gdy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)=S.$$

Piszemy wtedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Sumowanie nieskończone polega więc na policzeniu skończonych sum $S_n = a_1+...+a_n$ (tzw. sum częściowych) i sprawdzeniu, czy ciąg (S_n) ma granicę.

Może się zdarzyć, że granica ciągu S_n jest niewłaściwa, np. jeśli $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$. Wtedy piszemy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ i mówimy, że szereg jest rozbieżny do $+\infty$.

Fakt 17.2 (Warunek konieczny zbieżności)
Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dowód. Oczywiście $a_n = S_n - S_{n-1}$ oraz ciągi S_n i S_{n-1} mają tę samą granicę S. Z arytmetyki granic wynika, że a_n jest zbieżny i jego granicą jest $S - S = 0$. □

Oznacza to, że tylko szeregi o wyrazach dążących do zera mają szansę być zbieżne. Jednak nie jest to warunek wystarczający, jak pokazuje następujący przykaład.

Przykład 17.3
Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny do $+\infty$.

Dowód. Oczywiście sumy częściowe $S_n = 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$ rosną. Pokażemy teraz, że nie są ograniczone. Niech N będzie pewną liczbą naturalną i policzmy

$$\begin{aligned} S_{2^N} &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^N} \\ &\geq \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^N} \\ &\geq \frac{N+1}{2}. \end{aligned}$$

W powyższym szacowaniu zamieniliśmy wszystkie ułamki $\frac{1}{n}$ dla $n\in\{2^{k-1}+1,...,2^k\}$ na najmniejszy z nich, czyli $\frac{1}{2^k}$ (a takich ułamków jest 2^{k-1}). Zatem każda taka grupa jest większa od $2^{k-1}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}$. Zatem $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$. □

Przykład 17.4
Niech $a_1 \in \mathbf{R}$ oraz $q \in (-1, 1)$. Szereg geometryczny $a_1 + a_1q + a_1q^2 + ... + a_1q^{n-1} + ...$ jest zbieżny do liczby $\frac{a_1}{1-q}$, czyli

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q}$$

Dowód. Przypomnijmy wzór $(1-q)(1+q+q^2+...+q^{n-1}) = 1-q^n$ (sprawdź przez wymnożenie). Rozważmy sumy częściowe:

$$S_n = a_1 + ... + a_n = a_1 + a_1q + ... + a_1q^{n-1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Ponieważ $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, to z arytmetyki granic otrzymujemy, że:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

□

Przykład 17.5
Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny.

W powyższym przykładzie nie było trudno pokazać, że dany szereg jest zbieżny, ale już dużo trudniej jest policzyć dokładnie jego sumę. W istocie wynosi ona $\frac{\pi^2}{6}$ (!). Jest to typowe - często będziemy skupiali się na określeniu, czy szereg jest zbieżny, ale bez zastanawiania się nad jego sumą. Poniżej podamy najważniejsze kryteria używane do badania zbieżności szeregów.

Twierdzenie 17.6 (Kryterium porównanwcze)
Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ będą szeregami o wyrazach nieujemnnch, przy czym dla każdego $n \in \mathbf{N}$ zachodzi nierówność $a_n \leq b_n$.

1. Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, to $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.
2. Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

Twierdzenie 17.7 (Kryterium d'Alemberta)
Załóżmy, że (a_n) jest ciągiem o wyrazach niezerowych.

1. Jeśli istnieje granica
$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g < 1 ,$$
to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.
2. Jeśli istnieje granica
$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g > 1 ,$$
to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Twierdzenie 17.8 (Kryterium Cauchy'ego)
Niech (a_n) będzie dowolnym ciągiem.

1. Jeśli istnieje granica
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g < 1 ,$$
to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

2. Jeśli istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g > 1 \ ,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Szeregiem naprzemiennym nazywamy szereg, w którym co drugi wyraz jest przeciwnego znaku. Dla takich szeregów mamy dodatkowe kryterium.

Twierdzenie 17.9 (Kryterium Leibnitza)
Jeżeli (a_n) jest ciągiem malejącym (lub nierosnącym) zbieżnym do 0, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ jest szeregiem zbieżnym.

Z powyższego kryterium widzimy natychmiast, że mimo iż $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty$, to już $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ jest szeregiem zbieżnym.

Definicja 17.10 (Zbieżność bezwzględna)
Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie, gdy $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ jest zbieżny.

Definicja 17.11 (Zbieżność warunkowa)
Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny warunkowo, gdy jest zbieżny, ale $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ jest rozbieżny.

Fakt 17.12
Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < \infty$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Powyższy fakt mówi, że szeregi bezwzględnie zbieżne są zbieżne, ale szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ pokazuje, że nie jest odwrotnie. Szeregi, które są zbieżne, ale nie są bezwzględnie zbieżne nazywamy *warukowo zbieżnymi*.

17.1.1. *Przykłady.*

Przykład 17.13
Zbadaj zbieżność szeregów:

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+11}{7n+10}$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{7n^2+10}$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+11}{7n^3+10}$$

Rozwiązanie. W przykładzie (a) wyraz szeregu $\frac{n+11}{7n+10}$ nie dąży do zera, więc szereg ten nie może być zbieżny. W przykładzie (b) mamy

$$\frac{3n-1}{7n^2+10} \geq \frac{3n-n}{7n^2+10n^2} = \frac{2}{17n} \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{17n} = \infty \text{ (zob. przykład 17.3)},$$

zatem z kryterium porównawczego (twierdzenie 17.6) szereg z podpunktu (b) jest rozbieżny. Podobnie postępujemy z ostatnim szeregiem (zob. przykład 17.5):

$$0 \leq \frac{n+11}{7n^3+10} \leq \frac{n+11n}{7n^3} \leq \frac{12}{7n^2} \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{7n^2} < \infty,$$

więc (również z kryterium porównawczego) ostatni szereg jest zbieżny. □

Przykład 17.14
Czy zbieżne są szeregi:

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{5^n}$$
(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$$
(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[10]{n}}$$

Rozwiązanie. W przykładzie (a) skorzystamy z kryterium d'Alemberta (twierdzenie 17.7). Niech $a_n = \binom{2n}{n}/(5^n)$. Wtedy
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{\binom{2n}{n}} = \frac{1}{5} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{4}{5},$$
zatem pierwszy szereg jest zbieżny. W druigim przykładzie skorzystamy z kryterium Cauchy'ego (twierdzenie 17.8). Oznaczmy przez b_n wyraz ciągu.
$$\sqrt[n]{b_n} = \frac{n}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2},$$
więc również drugi szereg jest zbieżny. Ostatni szereg również jest zbieżny, a wynika to wprost z kryterium Leibnitza (twierdzenie 17.9, sprawdź założenia!). □

17.2. **Lista zadań.**

17.2.1. *Ćwiczenia.*

1. Oblicz $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, a następnie znajdź $\lim_{n\to\infty} S_n$:

(a) $a_k = \dfrac{1}{7^k}$

(b) $a_k = \dfrac{2^k + 5^k}{10^k}$

2. Zbadaj, czy następujące szeregi są zbieżne.

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+10}$$
(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$
(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n^4 - n^3 + 1}$$
(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n+3}$$
(e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{n^2}}$$
(f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$$

3. Znajdź taki szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 .$$

4. Policz sumy częściowe szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$$

a następnie wyznacz sumę tego szeregu.
Wskazówka: Skorzystaj z tego, że

$$\frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2n+1-(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}.$$

17.2.2. *Zadania.*

1. Dowiedź, że $4 < \sum_{n=1}^{127} \frac{1}{n} < 7$.

2. Dowiedź, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$$

jest zbieżny, a jego suma jest mniejsza od 2.

3. Rozstrzygnij, czy zbieżne są następujące szeregi:

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$$
(b)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$$
(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{n^2+1}$$
(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$$
(e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2-1}{n^3+6n^2+8n+47}$$
(f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot \ldots \cdot (4n-3)}$$
(g)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}$$
(h)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$$
(i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$$
(j)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$$
(k)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{3^n\cdot n!}$$
(l)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{2n+1})^n$$
(m)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\sqrt{n+1}}$$
(n)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}}$$
(o)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$$
(p)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$$
(q)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$$
(r)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{\sqrt[10]{n!}}$$
(s)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2^n}}$$
(t)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+\pi}{n^\pi+e}$$

4. Które z następujących szeregów są bezwzględnie zbieżne, które warunkowo zbieżne, a które rozbieżne:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 3^n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n+1}{n}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+4)(n+9)}}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot 2^{10^n}}{3^{2^n}}$

5. Rozstrzygnij, które z następujących szeregów są zbieżne. Czy są bezwzględnie zbieżne?

$$1-1+1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+...+1-\frac{1}{k}-\frac{1}{k}-...-\frac{1}{k}+...$$

$$1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+...+\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2}-...-\frac{1}{k^2}+...$$

6. Zbadaj zbieżność i bezwzględną zbieżność następujących szeregów:

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^3}{2^n}$$

(b)
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{n^2}}{n!}$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+17}{3^n}$$

(e)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!+1}}{n!}$$

(f)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n^2}}{(n+3)^{1//4}}$$

(g)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n(n+1)}(-1)^n$$

(h)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

(i)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\sqrt{4^n+3^n}}$$

(j)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{n!}$$

(k)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{1/n}}$$

(l)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)(-1)^n$$

7. Podaj przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=5 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=2\,.$$

8. Podaj przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że dla dowolnej liczby naturalnej k zachodzi równość

$$a_k=2\cdot\sum_{n=k+1}^{\infty}a_n\,.$$

9. Podaj przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1,\quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{1}{2}\quad \text{oraz}\quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n^4=\frac{1}{5}\,.$$

10. Podaj przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o sumie 100 i wyrazach dodatnich, że $a_n=n$ dla $n\le 10$.

11. Podaj przykład takiego szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ rozbieżnego do $-\infty$, że $a_n = n$ dla nieskończenie wielu n.

12. Podaj przykład takiego szeregu rozbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, że granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ istnieje i jest mniejsza od 1.

13. Podaj przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, że $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ dla nieskończenie wielu n.

14. Czy istnieje ciąg (a_n) taki, że (podaj przykład lub dowiedź, że nie istnieje):

(a) $a_n > \dfrac{1}{n}$ dla nieskończenie wielu n, $\forall n \in \mathbf{N}\ a_n > 0$, szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

(b) $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ dla nieskończenie wielu n, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 10$.

(c) $\forall n \in \mathbf{N}\ a_{n^2} = \dfrac{1}{n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.

(d) $\forall n \in \mathbf{N}\ a_n \in \mathbf{Z}$, $a_n = n$ dla $n \le 100$, szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

(e) $a_n = 1$ dla nieskończenie wielu n, szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

(f) Szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, szeregi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ i $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ są rozbieżne.

(g) Szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ jest zbieżny.

(h) Szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ jest zbieżny, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(i) Szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_{2^n} + a_{2^n+1} + a_{2^n+2} + \ldots + a_{2^{n+1}-1})$ jest zbieżny, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(j) Szeregi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ i $a_1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1})$ są zbieżne, ale mają różne sumy.

(k) Szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest rozbieżny.

(l) Szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest zbieżny.

15. Zbadaj zbieżność szeregów:

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(n+2)^n} \ .$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(n+2)^{n+2}} \ .$$

16. Oblicz sumy szeregów

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)\cdot(-1)^n}{n(n+1)}$$
(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

17. Pokaż z kryterium porównawczego, że jeśli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ są zbieżne, to zbieżny jest też szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$.

18. Na prostym odcinku torów dwa pociagi, jadące każdy z prędkością 30 km na godzinę, zbliżają się do siebie. Gdy odległość pomiędzy pociągami wynosi 1 km, pszczoła zaczyna latać tam i z powrotem pomiędzy pociągami z prędkością 60 km na godzinę. Wyraź odległość jaką przeleci pszczoła zanim pociagi się zderzą za pomoca nieskończonego szeregu i oblicz sumę tego szeregu.

19. Rozwiąż poprzednie zadanie odpowiadając na pytanie: jak długo będzie latała pszczoła?

20. Oprocentowanie lokaty w banku w skali rocznej wynosi p procent ($p > 0$). Bank nalicz odsetki co $1/n$ roku. Policz efentywne oprocentowanie w skali roku (czyli ile razy zwiększy nam się kapitał x po roku). Zobacz jak zmienia się zysk dla $p = 10$ i $n = 1, 2, 12, 365$.

21. Mrówka idzie z prędkością 30 cm na minutę wzdłuż jednorodnej gumowej taśmy. Na początku taśma ma długość 1 m i pod koniec każdej minuty jest rozciągana o dodatkowy metr. Mrówka zaczyna marsz w jednym końcu taśmy. Czy kiedykolwiek dotrze do drugiego końca? Jeśli tak, to po jakim czasie?
Wskazówka: Niech a_n oznacza stosunek odległości mrówki od początku taśmy do aktualnej długości taśmy. Wyraź a_{n+1} poprzez a_n.

17.2.3. *Problemy.*

1. Zbadaj zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}\cdot n!\cdot a^n}{n^n}$$
w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a. Dla jednej wartości a możesz nie udzielić odpowiedzi.

2. Oblicz sumę szeregów:

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$$
(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$
(c) Układamy cegły o jednakowej długości jedna na drugiej w ten sposób, aby konstrukcja nie zawaliła sie, tzn. musza byc zachowane prawa fizyki. Pokaż, że można cegły ułożyć tak, aby brzeg górnej cegły był wysunięty w prawo od brzegu dolnej cegły tak daleko jak zechcemy.

3. Dowiedz się jak brzmią kryteria Abela i Dirichleta zbieżności szeregów a następnie zbadaj zbieżność szeregów:

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(nx)}{n}, \qquad (x \in \mathbf{R})$$
(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(nx)}{n}, \qquad (x \in \mathbf{R})$$
(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg} n}{n}$$
(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin(n^2)}{n}$$

4. Dowiedz się na czym polega kryterium o zagęszczaniu i zbadaj zbieżność szeregów:
(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log^{10} n}$$
(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log^a n}, \qquad (a > 0)$$
(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log(\log n)}$$

5. Niech $a_n = n^{-1}$ gdy n jest kwadratem oraz $a_n = n^{-2}$ w przeciwnym wypadku. Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

6. Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) n^{-2}$, gdzie $\lambda(n)$ oznacza ilość cyfr w zapisie dziesiętnym liczby n.

7. Niech $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ oraz $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ będzie permutacją liczb naturalnych (tzn. funkcją różnowartościową i "na"). Pokaż, że jeśli w szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zmienimy kolejność sumowania, tzn. policzymy sumę $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$, to nowa suma może mieć dowolną wartość $S \in \mathbf{R}$ (a nawet $+\infty$ lub $-\infty$).

8. W szeregu harmonicznym wstawiamy znak minus przy wyrazach postaci $n = 2^k$, a pozostałe wyrazy pozostawiamy bez zmian. Wykaż, że tak otrzymany szereg jest rozbieżny.

9. Wiadomo, że $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = c \neq 0$. Pokaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

10. Wiadomo, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ jest zbieżny. Pokaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie.

11. Wiadomo, że a_n jest ciągiem rosnącym zbieżnym do a. Pokaż, że
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + ... + a_n^n} = a.$$

12. Podaj przykład ciągu (a_n) takiego, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, ale $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ rozbieżny.

18. SZEREGI POTĘGOWE

18.1. **Wprowadzenie.** Szeregi potęgowe, to szeregi liczbowe specjalnej postaci. Mając zadane współczynniki $(a_n)_n$, szeregiem potęgowym nazywamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{18.1}$$

gdzie $x \in \mathbb{R}$ jest zmienną (parametrem). Pierwszym pytaniem, które sobie zadajemy widząc szereg potęgowy jest: dla których x-ów szereg jest zbieżny? Odpowiedzią jest następujący fakt.

Fakt 18.1

Szeregu potęgowy (18.1) jest zbieżny:

1. dla x_0 i rozbieżny dla innych x lub
2. dla wszyskich $x \in \mathbb{R}$ lub
3. w w przedziale $(x_0 - R, x_0 + R)$ oraz rozbieżny w przedziałach $(-\infty, x_0 - R)$, $(x_0 + R, \infty)$, gdzie $R \in (0, \infty)$ jest tzw. *promieniem szeregu potęgowego.*

Zauważmy, że w ostatnim (najważniejszym) przypadku fakt nic nie mówi o punktach $x_0 - R$ i $x_0 + R$, które zwykle będziemy musieli analizować indywidualnie.

Dowód. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x_0 = 0$ (inne przypadki to tylko proste przesunięcie). Promień zbieżności R jest dany wzorem

$$R = \sup \left\{ t \geq 0 \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, r^n \right\}.$$

Jeśli $R = \infty$, to dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ szereg jest absolutnie zbieżny. Załóżmy, że $R \in [0, \infty)$. Wtedy, dla $|x| < R$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, R^n < \infty,$$

więc szereg jest absolutnie zbieżny.

Z drugiej strony, załóżmy nie wprost, że $|x| > R$ (dążymy do pokazania, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ jest rozbieżny). Wtedy $\lim_{n\to\infty} a_n x^n = 0$, a więc istnieje C, takie że $|a_n x^n| \leq C$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ustalmy r spełniające $R < r < |x|$ i zauważmy, że

$$|a_n| \, r^n = |a_n x^n| \, (r/|x|)^n \leq C \, (r/|x|)^n \, .$$

Ten ostatni szereg geometryczny jest zbieżny, więc $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ również, ale to przeczy definicji R, bo $r > R$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód. $\square$

Przykład 18.2

1. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ jest zbieżny dla $x \in (-1, 1)$ (R=1).
2. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$ jest zbieżny dla $x = 0$.
3. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ jest zbieżny dla $x \in [-1, 1)$.
4. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$ jest zbieżny dla $x \in [-1, 1]$.

Powyższe przykłady wynikają z wiadomości o prostych ciągach, kryteriów Cauchy'ego, d'Alemberta i Leibnitza.

Przykład 18.3
Zbadaj zbieżność szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n10^n}.$$

Rozwiązanie. Skorzystamy najpierw z kryterium d'Alemberta.

$$\frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)10^{n+1}} \frac{n10^n}{(x-3)^n} = \frac{n+1}{10n}(x-3) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{(x-3)}{10},$$

a więc szereg jest zbieżny, gdy $|x-3| < 10$ oraz rozbieżny, gdy $|x-3| > 10$. Pozostaje sprawdzić dwa końce przedziału $(-7, 13)$. Gdy $x = 13$, to szereg przyjmuje postać $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ i jest rozbieżny. Natomiast gdy $x = -7$, to szereg przyjmuje postać $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ i jest zbieżny. Ostatecznie, szereg jest zbieżny dla $x \in [-7, 13)$. □

18.1.1. *Szeregi zespolone.* Pojęcia granicy ciągu i sumy szeregu można naturalnie przenieść na liczby zespolone w miejsce liczb rzeczywistych. W tej zamianie wartość bezwzględna zmienia się w moduł liczby zespolonej. Nie będziemy tutaj powtarzać całej teorii granic i szeregów, ale podsumujemy najważniejsze własności szeregów zespolonych $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, gdzie $z_n = x_n + iy_n$.

Fakt 18.4
Własności szeregów zespolonych:

1. szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżne są oba szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$; wtedy
$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n,$$
2. jeśli $z_n \not\to 0$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ nie może być zbieżny (warunek konieczny),
3. zbieżne szeregi zespolone można dodawać, odejmować, mnożyć przez skalary,
$$\sum_{n=1}^{\infty} aw_n + bz_n = a \sum_{n=1}^{\infty} w_n + b \sum_{n=1}^{\infty} z_n,$$
4. zmiana skończonej liczby wyrazów nie wpływa na zbieżność szeregów,
5. jeśli szereg jest absolutnie zbieżny, tzn. $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ też jest zbieżny.
6. kryteria Cauchy'ego i d'Alemberta zachodzą (badamy granice $|z_{n+1}/z_n|$ lub $\sqrt[n]{|z_n|}$),
7. Zespolony szereg potęgowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ (gdzie $a_n, z, z_0 \in \mathbb{C}$) jest zbieżny dla $z = z_0$ albo $z \in \mathbb{C}$ albo zbieżny w kole $|z - z_0| < R$ i rozbieżny poza kołem $|z-z_0| > R$. Na okręgu $|z-z_0| = R$ może być w niektórych punktach zbieżny, a w innych rozbieżny.

Fakt 18.5 (Uogólnione kryterium Leibnitza-Dirichleta)
Jeśli (a_n) jest ciągiem dodatnim malejącym do zera, to zbieżne są szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \qquad (x \neq 2k\pi),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{inx} \qquad (x \neq 2k\pi).$$

18.2. **Lista zadań.**

1. Wyznacz przedział zbieżności szeregów potęgowych:

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n^{10}},$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 10^{n-1}},$$

(c)
$$\sum_{n=0}^{\infty} 50^n x^{2n+5},$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)},$$

(e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n^2+n}-n},$$

(f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+5} x^{3n+7}}{n \cdot 6^{2n}},$$

(g)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! x^n}{(n!)^3},$$

(h)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+7} x^{6n}}{\sqrt{n}},$$

(i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} n! x^{2^n},$$

(j)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(54n+1)^n x^{3n}}{(81n+2)^n},$$

(k)
$$\sum_{n=1}^{\infty} 10^{n^2} x^{n^3},$$

(l)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n} x^n}{n^2},$$

(m)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n \cdot n^8}{n^{10}+1} \cdot x^{3n},$$

(n)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \log^4 n \, x^n.$$

2. Oblicz promień zbieżności szeregu potęgowego

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^{n+7}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{4n}{n} x^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! x^{n^2}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+10}{n} x^n$

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(3n)!}{(2n)!(2n)!} x^n$

3. Oblicz sumy szeregów potęgowych:

(a)
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

(b)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n},$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n.$$

4. Podaj przykład szeregu potęgowego o promieniu zbieżności 2 i sumie równej 7 dla $x = 1$.

5. Podaj przykład dwóch szeregów potęgowych o promieniach zbieżności 1, których suma jest szeregiem potęgowym o promieniu zbieżności 2.

6. Zbadaj zbieżność szeregów zespolonych:

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + in + 1},$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + i},$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + i},$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + i}{n^2 + i}.$$

7. Wyznaczyć promienie/obszary zbieżności (w miarę możliwości) zespolonych szeregów potęgowych:

(a)
$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n,$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8z^n}{n^2},$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n,$$

(d)
$$\sum_{n=0}^{\infty} n! z^{n^2},$$

(e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{6n}}{n}.$$

19. WZÓR TAYLORA

19.1. **Wprowadzenie.** Przypomnijmy, że szereg potęgowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ jest zbieżny na przedziale (x_0-R, x_0+R) oraz rozbieżny poza domknięciem tego przedziału (będziemy rozważać tylko przypadki, gdy $R>0$). Definiuje on zatem funkcję na tym przedziale (być może również na końcach). Okazuje się, że takie funkcje mają bardzo dobre własności, np. są zawsze różniczkowalne nieskończenie wiele razy. Dla uproszczenia będziemy przyjmować $x_0=0$ (wszystkie inne szeregi potęgowe są tylko przesunięciem takich).

Fakt 19.1 (Szeregi potęgowe)
Niech dana będzie funkcja $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dla $x\in(-R,R)$, gdzie $R>0$ jest promieniem zbieżności szeregu. Wtedy:

1. $f(x)$ jest ciągła na przedziale $(-R,R)$,
2. $f'(x)$ istnieje na tym samym przedziale $(-R,R)$ oraz
$$f'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}.$$
3. Jeśli $f(x)$ jest zbieżna w którymś z końców, to jest ciągła (jednostronnie) w tym końcu.

Mogło by się wydawać, że taki sposób zadawania funkcji nie jest specjalnie użyteczny - w końcu ciężko poznać dokładną wartość szeregu. A jednak, okaże się, że jest to podstawowy sposób określania większości znanych nam funkcji (wielomiany, f. trygonometryczne, wykładnicze, potęgowe, logarytmy). Jednym z zastosowań jest np. wyznaczanie wartości funkcji trygonometrycznych z zadaną dokładnością. A wszystko to dzięki następującemu twierdzeniu.

Twierdzenie 19.2 (Wzór Taylora)
Załóżmy, że funkcja f jest zdefiniowana na przedziale (x_0-r, x_0+r) oraz jej pochodne do rzędu $n+1$ istnieją. Niech h będzie takie że $|h|<r$. Wtedy
$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+\frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}h^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+R_{n+1},$$
gdzie
$$R_{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}$$
oraz θ jest pewną liczbą z przedziału $(0,1)$.

Uwagi:

- O x_0 i h myślimy odpowiednio jako o punkcie statowym (gdzie znamy funkcję) i przesunięciu.
- R_{n+1} jest resztą, czyli czymś, co ma być stosunkowo małe. Wobec tego suma występująca przed R_{n+1} jest przybliżeniem stopnia n.
- Dla $n=1$ mówimy o aproksymacji liniowej (styczna), $n=2$ kwadratowej (styczna parabola), itd.
- Wzór na R_{n+1} pozwala oszacować błąd (trzba jedynie uważać na ξ o którym wiemy jedynie do jakiego przedziału należy).
- Jeśli podstawimy $x=x_0$ i $y=x_0+h$ to dostajemy przeformułowany wzór
$$f(y)=f(x)+f'(x)(y-x)+\frac{f''(x)}{2!}(y-x)^2+\frac{f^{(3)}(x)}{3!}(y-x)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(y-x)^n+R_{n+1}.$$
- Reszta R_{n+1} zależy zarówno od x_0 jak i h.

- Jeśli $x_0 = 0$, to wzór Taylora zwyczajowo nazywa się wzorem Maclaurina.

Może się zdarzyć, że dla pewnej funkcji f, punktu x_0 i niektórych h (np. h z przedziału $(-R, R)$) reszty R_{n+1} dążą do zera (gdy $n \to \infty$ oraz x_0 i h są ustalone). Wtedy dostajemy przedstawienie funkcji f w postaci szeregu potęgowego:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}h^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n.$$

Dla przykładu podamy wzory na kilka znanych funkcji (wzory te będą do wyprowadzenia i uzasadnienia w zadaniach).

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + ... \qquad x \in (-1, 1)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... \qquad x \in (-1, 1)$$

19.2. **Lista zadań.**

19.2.1. *Ćwiczenia.*

1. Zapisz wzór Taylora rzędu n w punkcie x_0 dla funkcji f, gdy
   (a) $f(x) = x^3 + x + 5$, $n = 5$, $x_0 = 2$,
   (b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $n = 10$, $x_0 = 3$,
   (c) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $n = 3$, $x_0 = 0$,
   (d) $f(x) = e^x \sin x$, $n = 3$, $x_0 = 0$.

2. Znajdź wzór na $f^{(n)}(0)$ i zapisz wzór Taylora z resztą dla funkcji: $(1-x)^{-1}$, $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\ln(1+x)$.

3. Uzasadnij, że dla ustalonego x reszta we wzorach Taylora z poprzedniego zadania zbiega do zera. Dla funkcji $(1-x)^{-1}$ oraz $\ln(1+x)$ załóż, że $|x| < 1/2$. W pozostałych przypadkach $x \in \mathbb{R}$.

4. Znajdź rozwinięcie w szereg Maclaurina funkcji $f(x) = x^2 \sin x$. Następnie, wyznacz $f^{(2015)}(0)$.

5. Oblicz sumę $\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n}$.

6. Wykorzystując wzór Taylora dla $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$, $h = 1$, $n = 5$ wyznacz przybliżenie liczby $\ln 2$. Oszacuj jaki jest popełniony błąd. Jak duże n trzeba dobrać, by błąd był mniejszy niż 10^{-6}.

19.2.2. *Zadania.*

1. Znajdź rozwinięcie Taylora funkcji $(1+x)^\alpha$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$. Dla jakich x szereg jest zbieżny? Czy szereg Taylora jest równy wyjściowej funkcji?

2. Znajdź szereg Taylora w punkcie a dla funkcji:

$$\sin(2x) \ \ (a=0), \qquad \ln(3x) \ \ (a=1), \qquad \cos^2(x) \ \ (a=\pi), \qquad x\ln(1+x^2) \ \ (a=0).$$

3. Rozwiń w szereg Taylora funkcję $f(x) = \frac{x}{x+1}$ w punkcie $x=2$ do rzędu $n=3$ (czy potrafisz podać pełen szereg?).

4. Znajdź rozwinięcie w szereg Maclaurina funkcji $f(x) = x^2 \sin x^3$. Następnie, wyznacz $f^{(2015)}(0)$.

5. Oblicz sumy:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)}{5^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 3^n}{4^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^{2n+1}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}.$$

6. Podaj przybliżenie $\cos(0,2)$ korzystając ze wzoru Taylora funkcji $\cos(x)$ rzędu 6 w punkcie $x=0$. Oszacuj resztę (błąd przybliżenia).

7. Podaj przybliżenie liczby a z dokładnością d, gdy

(a) $a = e$, $d = 10^{-8}$,

(b) $a = \ln(1,1)$, $d = 10^{-2}$,

(c) $a = \sin 1^o$, $d = 10^{-6}$,

(d) $a = \sqrt{5}$, $d = 10^{-4}$.

8. Rozwiń funkcję $\ln(1+x+x^2)$ w szereg Maclaurina.

20.1. **Wprowadzenie.** W poprzednim rozdziale nauczyliśmy się wyznaczać funkcję pierwotną do zadanej funkcji (czyli całkę nieoznaczoną). W tym rozdziale na chwilę zapomnimy o całce nieoznaczonej i wprowadzimy całkę oznaczoną.

Dla uproszczenia zakładać będziemy, że mamy funkcję ciągłą $f : [a, b] \to \mathbf{R}$. Interesować nas będzie pytanie: jak wyznaczyć pole pod wykresem funkcji f, tzn. obszar ograniczony przez oś oX, proste $x = a$, $x = b$ i wykres $y = f(x)$? Do tego będziemy potrzebowali kilku pojęć i oznaczeń.

Definicja 20.1 (Podział odcinka)
Podziałem odcinka $[a, b]$ nazywamy zbiór punktów $\mathcal{P} = (x_0, ..., x_n)$ takich, że

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b.$$

Średnicą podziału nazywamy długość najdłuższego odcinka podziału i oznaczamy

$$\delta(\mathcal{P}) = \max_{j=1,...,n} (x_j - x_{j-1}).$$

Zauważmy, że w powyższej definicji występuje $n + 1$ punktów i n odcinków $[x_i, x_{i+1}]$ o długościach $x_{i+1} - x_i$. Najprostszym (i najczęściej używanym) podziałem odcinka $[a, b]$ będzie podział na n równych części (każda długości $(b - 1)/n$ zadany przez punkty:

$$x_j = a + \frac{(b-a)j}{n}, \quad j = 0, ..., n.$$

Definicja 20.2 (Suma Riemmana)
Dla funkcji $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, podziału $\mathcal{P} = (x_0, ..., x_n)$ odcinka $[a, b]$, oraz punktów $y_j \in [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, ..., .n$, definiujemy sumę Riemmana

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \cdot f(y_j).$$

Suma Riemmana zależy zarówno od funkcji, jak i podziału oraz wyboru punktów y_j. Przybliża ona szukane pole pod wykresem funkcji f na przedziale $[a, b]$ (zbór rysunek). Jak więc można wyznaczyć pole pod wykresem? Wystarczy brać coraz drobniejsze podziały $\mathcal{P}_n$ i zbadać granicę sum Riemmana przy $n \to \infty$ (wybór punktów y_j nie będzie miał znaczenia). Musimy jednak pamiętać, by podziały miały coraz mniejsze średnice, tzn. by $\delta(\mathcal{P}_n) \to 0$.

Twierdzenie 20.3 (Całka Riemmana)
Dla funkcji ciągłej $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ oraz podziałów $\mathcal{P}_n$ odcinka $[a, b]$ takich że $\delta(\mathcal{P}_n) \to 0$ istnieje granica (całka Riemmana) $\int_a^b f(x)\, dx$, która spełnia

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_n S(f, \mathcal{P}_n).$$

Granica ta jest niezależna od wyboru podziałów $\mathcal{P}_n$ i punktów y_j.

W ten sposób wiemy już jak liczyć pole pod wykresem i że właśnie całka oznaczona wyznacza to pole. Zauważmy, że w tym momencie całka oznaczona (liczba związana z przedziałem) nie jest związana z całką nieoznaczoną (funkcja). Ponadto, całka liczy pole uwzględniając znak funkcji, tzn. pole pod osią liczone jest jako ujemne.

Na koniec policzymy z definicji pole pod parabolą $f(x) = x^2$ na odcinku $[0,1]$. Użyjemy podziałów $\mathcal{P}_n$ odcinka $[0,1]$ na n równych części:

$$x_j = \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]$$

oraz punktów $y_j = j/n$. Będziemy korzystać ze wzoru (można go sprawdzić np. przez indukcję):

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Obliczmy sumy Riemmana:

$$S(f, \mathcal{P}_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{j}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \to \frac{1}{3}.$$

Zatem pokazaliśmy, że

$$\int_0^1 x^2\,dx = 1/3.$$

---

1. Korzystając z definicji całki nieoznaczonej wyznacz:

(a)

$$\int_0^7 \pi\,dx,$$

(b)

$$\int_0^3 2x\,dx,$$

(c)

$$\int_{-1}^1 |x|\,dx,$$

(d)

$$\int_1^2 (x^2+1)\,dx,$$

2. Uzasadnij liniowość całki, tzn.

$$\int_a^b (cf(x) + dg(x))\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx + d\int_a^b g(x)\,dx.$$

---

3. Oblicz z definicji, jako granicę sum Riemmana, następujące całki:

$$\int_0^1 x^3\,dx,$$ [17]

$$(*)\quad \int_0^{\pi/2} \sin(x)\,dx.$$ [18]

17 *Wskazówka:* $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

18 *Wskazówka:* znajdź wzór na $\sin(x) + \sin(2x) + ... + \sin(nx)$.

4. Oblicz pole ograniczone przez wykresy równań:

$$y = 2x, \quad y = 0, \quad y = -3x + 10;$$

$$y = x^2, \quad y = \sqrt{x};$$

$$y = 0, \quad x = 8, \quad y = \sqrt[3]{x}.$$

5. Udowodnij oszacowania:

$$\frac{1}{5} < \int_1^2 \frac{1}{1+x^2}\, dx < \frac{1}{2}.$$

6. Korzystając z metody przybliżania przez sumy Riemmana oblicz objętość stożka o wysokości H i promieniu podstawy R.

7. Korzystając z metody przybliżania przez sumy Riemmana oblicz objętość kuli o promieniu R.

---

8. Udowodnij oszacowania:

$$\frac{1}{2} < \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx < \frac{3}{4}.$$

9. Na odcinku $[0, 1]$ rozważmy funkcję:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{dla} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Pokaż, że całka Riemmana funkcji f nie istnieje, tzn. istnieją podziały $\mathcal{P}_n$, takie że $\delta(\mathcal{P}_n) \to 0$, oraz dwa różne wybory punktów y_j, takie że w sumy Riemmana w tych dwóch przypadkach nie zbiegają do tej samej liczby (albo nie zbiegają w ogóle).

---

21. CAŁKI NIEOZNACZONE

21.1. **Wprowadzenie.** Na początku pochodną rozumieliśmy jako operację, która określała "nachylenie" wykresu funkcji f w danym punkcie x. Jednak dla większości rozważanych funkcji pochodna istniała w dowolnym punkcie x. Zatem dla funkcji $f(x)$ mieliśmy nową funkcję $f'(x)$. W tym rozdziale zajmiemy się operacją odwrotną - tzn. mając zadaną funkcję $g(x)$ będziemy szukali *całki nieoznaczonej*, tzn. takiej funkcji $f(x)$, dla której zachodzi $f'(x) = g(x)$.

Definicja 21.1 (Całka nieoznaczona)
Dla funkcji ciągłej g (określonej np. na przedziale lub prostej) całką nieoznaczoną nazywamy zbiór wszystkich funkcji f, które spełniają

$$f'(x) = g(x).$$

Zbiór ten nazywamy całką nieoznaczoną funkcji g i zapisujemy

$$\int g(x)\, dx.$$

Od razu jednak zauważmy, że funkcji $f(x)$ z powyższej definicji zawsze jest wiele. Np. Szukając całki z funkcji $g(x) = x^2$ od razu widzimy, że dla dowolnego $C \in \mathbf{R}$ funkcje $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ spełniają $f'(x) = g(x)$. Tak więc całka nieoznaczona zawiera zawsze nieskończenie wiele funkcji, ale w istocie jest to jedna funkcja i jej przesunięcia o stałą o czym mówi następujący fakt.

Fakt 21.2
Całka nieoznaczona z funkcji ciągłej zawsze istnieje i jest postaci

$$\int g(x)\, dx = \{f(x) + C \ : \ C \in Rr\}.$$

Często prawą stronę będziemy pisać w skrócie $f(x) + C$, mając na myśli powyższy zbiór.

Dowód. Sprawa istnienia całki wyjaśni się właściwie w kolejnym rozdziale. Przyjrzyjmy się natomiast części dotyczącej postaci *funkcji pierwotnych*, czyli tych funkcji $f(x)$ dla których $f'(x) = g(x)$. Zauważmy, że mając dane dwie funkcje $f_1(x)$ i $f_2(x)$ takie że $f_1'(x) = f_2'(x) = g(x)$ mamy $(f_1(x) - f_2(x))' = 0$. Czyli funkcja $f_1 - f_2$ ma pochodną zero, zatem jest stałą (przypomnijmy, że rozważamy funkcje na odcinku, półprostej lub prostej). To dowodzi, że wszystkie funkcje pierwotne różnią się o stałą. □

Skoro już wiemy czym jest funkcja pierwotna, to wypiszmy w tabelce wzory na całkę z najprostszych znanych funkcji. Te wzory wprost wynikają ze wzorów na pochodną (wystarczy zauważyć, że pochodną prawej strony jest funkcja pod całką).

$$\int x^a\, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \qquad a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C, \qquad x \in (-\infty, 0) \cup x \in (0, \infty)$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \qquad a > 0$$

Powyższe wzory będą dla nas podstawą do obliczania całek z bardziej skomplikowanych funkcji. W internecie łatwo można znaleźć obszerniejsze wersje tej listy. Zauważmy, że w szczególności całką z funkcji $g(x) = 1$ jest $x + C$. Szczególnym przypadkiem jest funkcja $g(x) = e^x$, której pochodna jest równa e^x, zatem całką jest $e^x + C$.

21.1.1. *Całkowanie przez części.* Przypomnijmy sobie wzór na pochodną iloczynu

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Dzięki niemu mogliśmy policzyć pochodną dowolnego iloczynu (dla którego znaliśmy pochodne poszczególnych czynników). Niestety z całkami nie jest tak prosto. Powyższy wzór, owszem, przydaje się, ale tylko zamienia jedną całkę na inną, o czym mówi poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 21.3 (Całkowanie przez części)
Niech $f, f', g, , g'$ będą funkcjami ciągłymi. Wtedy zachodzi wzór

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx.$$

Dowód. Zauważmy, że obie strony są rodzinami funkcji, w których wszystkie funkcje różnią się od siebie o stałą. Wystarczy zatem sprawdzić, że dla przykładowej funkcji z lewej strony i przykładowej funkcji z prawej strony funkcje te mają tę samą pochodną. Pochodną dowolnej funkcji z lewej strony jest oczywiście $f(x)g'(x)$. Natomiast pochodna funkcji z prawej strony jest równa

$$(f(x)g(x))' - f'(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = f(x)g'(x)$$

i to kończy dowód. □

Zwróćmy uwagę na zmianę - na początku mamy dwie funkcje pod całką, przy czym jedną z nich różniczkujemy (liczymy pochodną), a drugą z nich całkujemy ($g'(x)$ zmienia się w $g(x)$).

Zobaczmy na przykład:

$$\int x \cos x\, dx = \int x(\sin x)'\, dx = x \sin x - \int 1 \cdot \sin x\, dx = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x.$$

Czasami wygodniej będzie używać następującej notacji, którą pokażemy na tym samym przykładzie.

$$\int x \cos x\, dx = \begin{bmatrix} f(x) = x & g'(x) = \cos x \\ f'(x) = 1 & g(x) = \sin x \end{bmatrix} = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x.$$

W notacji tej funkcje występujące w pierwotnej całce są w górnym wierszu, funkcje występujące w nowej całce - w dolnym wierszu, a wyraz powstający poza całką pochodzi z głównej przekątnej.

21.1.2. *Całkowanie przez podstawienie.* Kolejną metodą używaną do obliczania całek nieoznaczonych jest *całkowanie przez podstawienie.* Wynika ono ze wzoru na pochodną złożenia $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$. Niestety, podobnie jak przy poprzedniej metodzie jest to jedynie sposób zamiany jednej całki na inną.

Twierdzenie 21.4 (Całkowanie przez podstawienie)
Niech $\int g(y)\, dy = G(y) + C$, czyli G jest funkcją pierwotną do $g(y)$. Wtedy

$$\int g(f(x)) \cdot f'(x)\, dx = G(f(x)) + C.$$

Dowód tego faktu jest natychmiastowy - różniczkując prawą stronę zgodnie z przytoczoną regułą dostajemy funkcję podcałkową $g(f(x)) \cdot f'(x)$.

Przejdźmy natomiast do przykładu zastosowania. Załóżmy, że chcemy wyznaczyć całkę z funkcji $\sin^5 x \cdot \cos x$. Zauważmy, że ma ona postać jak w twierdzeniu przy $f(x) = \sin x$ oraz $g(y) = y^5$. Z tabeli podstawowych całek wiemy, że $\int g(y)\, dy = \frac{1}{6}y^6 + C$. Nasze twierdzenie daje nam więc wynik:

$$\int \sin^5 x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{6} sin^6 x + C.$$

Nie zawsze jednak wszystko jest tak widoczne jak w tym przypadku. Wtedy może nam się przydać następująca notacja, która wprowadza nową zmienną $y = f(x)$ (to znów jest tylko kwestia zapisu, który ułatwia obliczenia). Spójrzmy na ten sam przykład w nowym zapisie.

$$\int \sin^5 x \cdot \cos x \, dx \begin{bmatrix} y = \sin x \\ dy = \cos x \, dx \end{bmatrix} = \int y^5 \, dy = \frac{1}{6}y^6 + C = \frac{1}{6}\sin^6 x + C.$$

W nawiasie zapisujemy sobie podstawienie i używamy nieco sztucznego zapisu, który zmienia dx w dy. Dla podstawienia $y = f(x)$ ta zamiana ma postać $dy = f'(x)dx$ (co zgadza się z zapisem $f'(x) = dy/dx$, ale nie będziemy wnikać w głębsze znaczenie tego napisu - tutaj jest to dla nas tylko wygodny zapis).

Zobaczmy kolejny przykład, gdzie podstawienie pomoże nam "pozbyć się" wyrażenia liniowego typu $ax + b$.

$$\int \sqrt{5x-7}\, dx = \begin{bmatrix} y = 3x - 7 \\ dy = 3\, dx \end{bmatrix} = \int \sqrt{y}\, dy = \int y^{1/2}\, dy = \frac{2}{3}y^{3/2} + C = \frac{2}{3}(3x-7)^{3/2} + C.$$

21.2. **Lista zadań.**

---

1. Wyznacz całki:

(a)
$$\int \pi \, dx,$$

(b)
$$\int (x^{17} - 3x^4 + \pi x - e)\, dx,$$

(c)
$$\int \frac{x^3+1}{x^2}\, dx,$$

(d)
$$\int x(x^2+5)^3\, dx,$$

(e)
$$\int xe^{-x}\, dx,$$

(f)
$$\int \sqrt[3]{3x+4}\, dx,$$

---

2. Wyznacz całki:

(a)
$$\int \frac{\sqrt[6]{x} - x^3\sqrt{x} + x - 1}{\sqrt[3]{x}}\,dx,$$

(b) [19]
$$\int \ln(2x+5)\,dx,$$

(c)
$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+7}}\,dx,$$

(d)
$$\int \frac{1}{2\cos^2(3x)}\,dx,$$

(e)
$$\int x^2\sin(x)\,dx,$$

(f) [20]
$$\int \sin(x)e^{2x}\,dx,$$

(g)
$$\int \cos(2x)\sin(3x)\,dx,$$

(h)
$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx,$$

(i)
$$\int 5^{3-2x}\,dx,$$

(j)
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,dx,$$

(k)
$$\int \frac{\tan(x)}{\cos^2(x)}\,dx,$$

(l)
$$\int x^3\cos^2(x^4)\,dx,$$

(m)
$$\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+\sin(x)}}\,dx,$$

(n)
$$\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx,$$

(o)
$$\int x^3e^{5x}\,dx,$$

[19] *Wskazówka:* Całkę $\int \ln y\,dy$ można policzyć całkując przez części ($\ln y = \ln y \cdot 1$).
[20] Zacznij od scałkowania dwa razy przez części.

(p)
$$\int \sqrt{x}\ln x\,dx,$$
(q)
$$\int \sqrt{x}(\ln x)^3\,dx,$$
(r)
$$\int x^2\ln x\,dx,$$
(s)
$$\int (\ln x)^2\,dx,$$
(t)
$$\int \arccos(-7x)\,dx,$$
(u)
$$\int \sin(\ln x)\,dx,$$
(v)
$$\int x^n\ln x\,dx,$$
(w)
$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx,$$
(x)
$$\int \frac{1}{e^x+1}\,dx,$$
(y)
$$\int \sin^2(x)\cos^3(x)\,dx,$$
(z)
$$\int \sin^2(x)\cos^4(x)\,dx,$$

---

3. Wyznacz całki:
(a)
$$\int \mathrm{tg}^2 x\,dx,$$
(b)
$$\int x^2\sin\sqrt{x^3+1}\,dx,$$
(c)
$$\int x\mathrm{arctg}x\,dx,$$
(d)
$$\int \cos(x)\cos(2x)\cos(3x)\cos(4x)\,dx,$$

(e)

$$\int \sin(mx)\cos(nx)\,dx,$$

(f)

$$\int \frac{a}{x-b}\,dx,$$

(g)

$$\int \frac{a}{(x-b)^n}\,dx \qquad (n \geq 2),$$

(h)

$$\int \frac{2x}{x^2+5}\,dx,$$

(i)

$$\int \frac{2}{x^2+5}\,dx,$$

(j)

$$\int \frac{3x}{(x^2+7)^2}\,dx,$$

(k)

$$\int \frac{x-1}{4x^2-4x+1}\,dx,$$

(l)

$$\int \frac{2x-13}{(x-5)^2}\,dx,$$

(m)

$$\int \frac{3}{9x^2-6x+2}\,dx,$$

(n)

$$\int \frac{5x+11}{x^2+3x-18}\,dx,$$

(o)

$$\int \frac{1}{2x-3x^2}\,dx,$$

(p)

$$\int \frac{2x-1}{x^2-6x+9}\,dx,$$

(q)

$$\int \frac{2x-20}{x^2-8x+25}\,dx,$$

(r)

$$\int \frac{5x}{2x+3}\,dx,$$

(s)

$$\int \frac{7x^2+7x-176}{x^3-9x^2+6x+56}\,dx,$$

(t)

$$\int \frac{1}{x^3-a^2x}\,dx,$$

(u)

$$\int \frac{3x^2+x-2}{(x-1)^3(x^2+1)}\,dx,$$

(v)

$$\int x\sqrt{2+3x}\,dx$$

(w)

$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{3x+1}}\,dx$$

(x)

$$\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx$$

(y)

$$\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$$

(z)

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}\,dx$$

()

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$$

()

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$$

()

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx$$

()

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx$$

()

$$\int \sin(2x)\sin(5x)\,dx$$

()

$$\int \frac{1}{\sin^3 x}\,dx$$

()

$$\int \sin^3 x\,dx$$

()

$$\int \frac{1}{\sin x\cos^3 x}\,dx$$

()

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,dx$$

()

$$\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$$

()

$$\int \ln(x^2+1)\,dx$$

()

$$\int \frac{1}{e^e+e^{2x}}\,dx$$

()

$$\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$$

22. ZASTOSOWANIE CAŁEK

22.1. **Wprowadzenie.** W poprzednich dwóch rozdziałach poznaliśmy całki oznaczone i nieoznaczone, które były obiektami zupełnie różnymi. Całka oznaczona z funkcji na przedziale jest liczbą, a całka nieoznaczona funkcją (a dokładniej - rodziną funkcji). W tym rozdziale poznamy połączenie między tymi obiektami, o którym mowa w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 22.1 (Zasadnicze Twierdzenie Analizy)
Załóżmy, że f jest funkcją ciągłą na pewnym przedziale oraz

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Wtedy dla podprzedziału $[a, b]$ mamy

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Przypomnijmy, że policzenie całki oznaczonej zwykle nie było sprawą prostą (podziały, sumy Riemmana, granice,...). Od tej pory mamy na to nowy, prostszy sposób. Zamiast rozważać sumy Riemmana możemy wyznaczyć całkę nieoznaczoną z danej funkcji i mając ją z powyższego twierdzenia natychmiast możemy wyznaczyć całki oznaczone na dowolnym przedziale.

Przykładowo, wiemy już, że

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Z tego wynika, że

$$\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

W rachunkach pomocny będzie następujący zapis:

$$F(x)|_a^b = F(b) - F(x).$$

Wyznaczmy teraz (raz jeszcze, ale znacznie prościej) pole pod sinusoidą:

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = [-\cos x]|_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2.$$

Od teraz potrafimy więc obliczyć znacznie więcej całek.

Przypomnijmy, że podstawowym zastosowaniem całek jest wyznaczanie pola pod wykresem i wielkość $\int_a^b f(x)\,dx$ jest właśnie tym polem nad przedziałem $[a, b]$ (ale pole nad osią OX jest dodatnie, a pod osią OX ujemne).

Okazuje się jednak, że całka oznaczona ma znacznie więcej zastosowań do wyznaczania wielkości geometrycznych i fizycznych. Poniżej w tabelce podajemy kilka przykładów takich zastosowań i wzory (ta lista mogłaby być znacznie dłuższa).

wielkość	wzór	uwagi
pole pod wykresem	$\int_a^b \lvert f(x)\rvert\,dx$	
długość krzywej	$\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$	
objętość bryły obrotowej	$\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$	obrót wokół osi OX
pole powierzchni bocznej bryły obrotowej	$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$	obrót wokół osi OX
objętość bryły obrotowej	$2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$	obrót wokół osi OY
środek ciężkości figury między wykresami $f_1(x) \leq f_2(x)$	$x = \frac{\int_a^b x(f_2(x)-f_1(x))\,dx}{S}$ $y = \frac{\int_a^b x(f_2^2(x)-f_1^2(x))\,dx}{2S}$	S -pole figury
droga	$\int_a^b v(t)\,dt$	v - prędkość, t-czas
przyrost prędkości	$\int_a^b a(t)\,dt$	a - przyspieszenie, t-czas
praca	$\int_a^b F(x)\,dx$	F - siła

Rozważmy jeszcze na koniec następujący przykład: Nich Dana będzie bryła B w przestrzeni oraz prosta l, której współrzędną oznaczmy przez x. Niech $P(x)$ oznacza pole (dwuwymiarowe) przecięcia bryły B i płaszczyzny prostopadłej do l przechodzącej przez x. Wtedy objętość bryły B wynosi

$$V = \int_a^b P(x)\,dx,$$

gdzie zakładamy że $P(x) = 0$ poza przedziałem $[a, b]$.

Jako przykład rozważmy namiot, który jako podstawę ma kwadrat o boku 1, a przekroje prostopadłe do ustalonej przekątnej są półkolami. Niech wybraną prostą będzie przekątna i rozważmy x - odległość od wierzchołka. Wystarczy $x \in [0, \sqrt{2}/2]$ (policzymy do połowy i podwoimy. Wtedy dla x mamy pole $P(x) = \pi x^2$. Szukana objętość wynosi

$$V = 2\int_0^{\sqrt{2}/2} \pi x^2\,dx = 2\pi[x^3/3]\Big|_0^{\sqrt{2}/2} = \pi\sqrt{2}/6.$$

22.2. **Lista zadań.**

1. Oblicz pole ograniczone przez wykresy równań:

$$y = x^2, \quad y = \sqrt[3]{x},$$

$$y = x + 2, \quad y = -3x + 6, \quad y = (2 - x)/3,$$

2. Znajdź pole powierzchni ograniczonej wykresami $y = \cos x$, $y = \sin(2x)$ w obszarze $0 \leq x \leq \pi/2$.

3. Znajdź objętość bryły powstałej przez obrót obszaru ograniczonego przez wykresy: $y = x^2/4$ oraz $y = 5 - x^2$ wokół osi oX.

4. Oblicz pole ograniczone przez wykresy równań:

$$y = x^2, \quad y = \sqrt[3]{x},$$

$$y = x + 2, \quad y = -3x + 6, \quad y = (2 - x)/3,$$

$$y = x^2 - 2x, \quad y = 4 - x^2,$$

$$y = 2x^2 - 6x + 9, \quad y = 6x - 9, \quad y = 0, \quad x = 0.$$

5. Dwie cząstki A i B położone w odległości $d = 36$ zbliżają się do siebie z prędkościami $v_A(t) = 10t + t^3$ i $v_B(t) = 6t$ $(t \geq 0)$. Po jakim czasie cząstki te zderzą się?

6. Dla jakich wartości m prosta $y = mx$ i krzywa $y = \frac{x}{x^2+1}$ zamyka obszar? Znajdź pole tego obszaru.

7. Znajdź objętość bryły powstałej przez obrót obszaru ograniczonego przez wykresy: $y = \ln x$, $x = 2$, $y = 0$ wokół osi OY.

8. Kroimy pomarańczę (kulę) dwoma równoległymi cięciami odległymi o d od siebie. Pokaż, że wycięty fragment ma zawsze tyle samo powierzchni skórki (sfery).

9. Policz objętość torusa, czyli bryły powstałej przez obrót koła $(x-2)^2 + y^2 \leq 1$ wokół osi OY.

10. Samochód, który w czasie $t = 0$ ma prędkość $v(0) = 10km/h$ zaczyna przyspieszać. Przyspieszenie dane jest według wzoru $a(t) = t^2 + t + 1$. Znajdź prędkość samochodu w czasie $t = T > 0$.

11. znajdź średnią wysokość funkcji $f(x) = \cos^4 x \sin x$ na odcinku $[0, \pi]$.

12. Nieporuszający się obiekt spada swobodnie przez czas $t \in [0, T]$ według wzoru $s = \frac{1}{2}gt^2$. Pokaż, że średnia prędkość względem czasu wynosi $\frac{1}{2}v_T$, gdzie v_T jest prędkością po czasie T oraz że średnia prędkość względem drogi s wynosi $\frac{2}{3}v_T$.

13. Znajdź długość krzywej zadanej przez wykres funkcji $f(x) = \ln(\cos x)$ dla $0 \leq x \leq \pi/3$.

14. Znajdź środek masy obszaru ograniczonego przez $x = 0$, $y = 0$, $y = \cos x$.

15. Pręt metalowy o wadze $80kg$ i długości $10m$ leży na ziemi. Jaką pracę należy wykonać, żeby podnieść jeden koniec łańcucha na wysokość $6m$?

---

16. Dany jest okrąg o promieniu 1 i ustalona średnica. Rysujemy wszystkie cięciwy równoległe do tej średnicy i nad każdą z nich stawiamy namiot w kształcie trójkąta równobocznego (pionowo). Oblicz objętość tak powstałej bryły.

17. Statek kosmiczny w przestrzeni porusza się ruchem spiralnym, gdzie współrzędne to: $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $z(t) = t$. Oblicz drogę przebytą przez statek w czasie $[0, T]$.

18. Gumka ma naturalną długość $20cm$. Porównaj pracę potrzebną do rozciągnięcia gumki z $20cm$ do $30cm$ do pracy potrzebnej do rozciągnięcia gumki z $30cm$ do $40cm$ (Tzn. znajdź zależność między tymi pracami. Prawo Hooke'a mówi, że siła działająca na gumkę, jest proporcjonalna do wydłużenia gumki ponad naturalną długość.)

19. Znajdź powierzchnie bryły powstałej przez obrót wokół osi OX wykresu funkcji $f(x) = c + a\cosh(x/a)$ dla $0 \leq x \leq a$.

20. Zbiornik ma kształt odwróconego stożka o wysokości $10m$ i promieniu podstawy $4m$ i jest wypełniony wodą do wysokości $8m$. Oblicz pracę potrzebną do wypompowania wody przez otwór na wysokości podstawy zbiornika.

21. Znajdź moment bezwładności kuli jednorodnej o średnicy R przy obrocie względem jego osi symetrii.

---

23. KOLOROWANIA I PODZIAŁY FIGUR[21]

23.1. **Wprowadzenie.** W tym rozdziale zajmiemy się zadaniami związanymi z wypełnianiem szachownic i plansz, jak również dowodzeniem, że w pewnych sytuacjach jest to niemożliwe. Bardzo często takie zadania można rozwiązać wypełniając pola kolorami lub wpisując określone liczby w pola planszy. Jeśli w zadaniu nie jest określone inaczej, to przez (poprawne) pokrycie przy pomocy płytek rozumiemy pokrycie, w którym każde pole (szachownicy) jest przykryte oraz płytki nie nachodzą na siebie i nie wystają poza szachownicę.

Zaczniemy od przykładu, w którym techniki tego typu nie są potrzebne.

Przykład 23.1

Czy szachownicę 8×8 z usuniętymi dwoma przeciwległymi narożnikami da się pokryć płytkami 2×2?

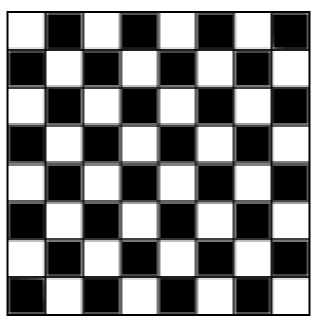
Rozwiązanie. Każda płytka 2×2 umieszczona na szachownicy pokrywa 4 pola, zatem każde poprawne pokrycie szachownicy przy pomocy płytek 2×2 pokrywa liczbę pól podzielną przez 4. Szachownica 8×8 po usunięciu dwóch narożników zawiera 62 pola. Ponieważ liczba 62 nie jest podzielna przez 4, poprawne pokrycie szachownicy przy pomocy płytek 2×2 jest niemożliwe. □

Rozważmy teraz nieco trudniejszy wariant powyższego zadania.

Przykład 23.2

Czy szachownicę 8×8 z usuniętymi dwoma przeciwległymi narożnikami da się pokryć płytkami 2×1?

Rozwiązanie. Pomalujmy pola danej figury w tradycyjny wzór szachownicy (patrz rysunek). Wówczas każda płytka położona na szachownicy tak, aby zakrywała dwa pola, zakrywa jedno



Rysunek 1. Kolorowanie szachownicy do przykładu 2

pole białe i jedno czarne. Gdyby figurę dało się pokryć płytkami 2×2, oznaczałoby to, że zawiera ona tyle samo pól białych, co czarnych. Jednak pełna szachownica 8×8 zawiera po 32 pola białe i czarne, więc usunięcie dwóch naroży (w naszym wypadku czarnych) prowadzi do figury o 30 polach czarnych i 32 polach białych. Skoro liczby pól białych i czarnych są różne, nie da się pokryć tej figury płytkami. □

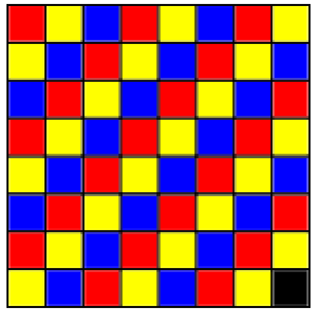
W trudniejszych zadaniach często warto rozważać inne niż klasyczne kolorowania szachownicy. Zwykle warto zacząć od kolorowań, które są w pewien sposób regularne.

Przykład 23.3

Czy szachownicę 8×8 z usuniętym narożnikiem da się pokryć płytkami 3×1?

[21] Rozdział dodany przez Agnieszkę Hejnę

Rozwiązanie. Pomalujemy pola szachownicy na 3 kolory jak na rysunku (żółty, niebieski i czerwony).

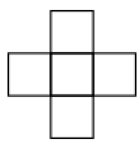


Rysunek 2. Kolorowanie szachownicy do przykładu 3

Wówczas każda płytka 3×1 pokrywająca trzy pola pokrywa po jednym polu w każdym z trzech kolorów. Ponieważ jednak liczby pól różnych kolorów są różne (wynoszą odpowiednio 22 – żółte, 21 – czerwone, 20 – niebieskie), żądane pokrycie figury nie jest możliwe. □

Czasami, gdy w zadaniach występują określone kształty płytek, warto dobrać pewne mniej regularne kolorowanie zależne od sytuacji. Często zdarza się, że warto użyć więcej niż jednego kolorowania.

Przykład 23.4
Udowodnij, że szachownicy o wymiarach 14×14 z usuniętym polem narożnym nie można wypełnić prostokątami o wymiarach 1×5 oraz pięciopolowymi krzyżykami jak na rysunku.

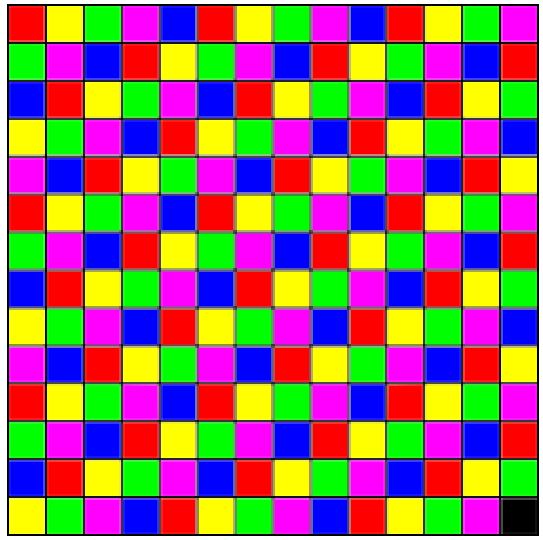


Rysunek 3. Pięciopolowy krzyżyk

Rozwiązanie. Pokolorujemy pola szachownicy jak na rysunku. Wówczas każdy prostokąt o wymiarach 1×5 oraz każdy krzyżyk pokrywają po jednym polu z każdym z kolorów. Gdyby pokrycie szachownicy prostokątami i krzyżykami było możliwe, zawierałaby ona tyle samo pól każdego rodzaju. Tymczasem liczby pól odpowiednich kolorów są odpowiednio równe 39, 39, 40, 39 i 38. Można się o tym przekonać licząc pola poszczególnych rodzajów w kwadracie 4×4 w prawym dolnym rogu, gdyż w pozostałej części szachownicy pól każdego rodzaju jest tyle samo (36) – a to dlatego, że ta część daje się pokryć prostokątami 1×5. □

23.2. **Lista zadań.**

1. Znajdź inne rozwiązanie przykładu 2, które opiera się na pokolorowaniu planszy w pionowe pasy.
2. Czy szachownicę 13×13 z usuniętym narożnikiem da się pokryć płytkami 3×1?
3. Czy szachownicę 8×8 z usuniętym jednym polem da się pokryć płytkami 2×1?
4. Czy szachownicę 10×10 z usuniętymi przeciwległymi polami narożnymi można pokryć płytkami o wymiarach 2×2?



Rysunek 4. Kolorowanie do przykładu 4

5. Znajdź rozwiązanie przykładu 3, w którym zamiast trzech kolorów użyjesz tylko dwóch.

6. Czy szachownicę 11×11 z usuniętym polem narożnym można pokryć płytkami o wymiarach 3×1?

7. Kwadrat o boku 8 podzielono na 64 kwadraty jednostkowe zwane dalej polami. Czy można umieścić w nim 21 prostokątów o wymiarach 1×3 w taki sposób, aby każdy prostokąt pokrywał 3 pola, a przy tym prostokąty na siebie nie nachodziły? Jeśli tak, to które pole może pozostać niepokryte?

8. Czy szachownicę o wymiarach 8×8 można pokryć 12 klockami o wymiarach 1×5 i jednym klockiem o wymiarach 2×2?

9. Z szachownicy o wymiarach 13×13 usunięto 4 narożne pola. Udowodnić, że tak powstałej figury nie da się pokryć klockami 5×1.

10. Załóżmy, że p jest liczbą pierwszą. Udowodnij, że szachownicę $n \times m$ da się pokryć płytkami $1 \times p$ wtedy i tylko wtedy, gdy p dzieli n lub m.

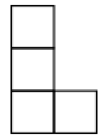
11. Załóżmy, że p jest liczbą pierwszą. Murarz ma prostopadłościenne cegły o wymiarach $1 \times 1 \times p$ i pudełko o wymiarach $m \times n \times k$. Chce on umieścić cegły w pudełku w taki sposób, aby całe pudełko było wypełnione i żadna cegła nie wystawała. Udowodnij, że jest to możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy p dzieli co najmniej jedną z liczb n, m, k.

Dwa powyższe zadania to dwa szczególne przypadki bardziej ogólnego twierdzenia (n-wymiarowego) De Bruijna. Zachęcamy zainteresowanego czytelnika do samodzielnego wyszukania informacji na ten temat.

12. Udowodnij, że szachownicy 10×10 nie da się pokryć płytkami 1×4.

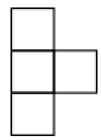
13. Kwadrat o boku 8 podzielono na 64 kwadraty jednostkowe zwane dalej polami. Ile prostokątów o wymiarach 1×5 potrzeba, aby pokryć cały kwadrat w taki sposób, że każdy prostokąt pokrywa 5 pól? Prostokąty mogą na siebie nachodzić (tzn. pole może być pokryte przez dwa lub więcej prostokątów).

14. Czy szachownicę 11×4 da się pokryć płytkami L jak na rysunku?



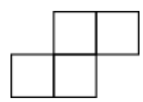
Rysunek 5. Płytka L

15. Czy szachownicę 50×50 da się pokryć płytkami T jak na rysunku?



Rysunek 6. Płytka T

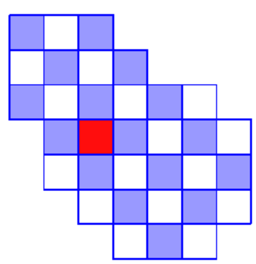
16. Czy szachownicę o wymiarach 8×8 można pokryć przy pomocy jednej płytki Z oraz dowolnej liczby płytek 1×4?



Rysunek 7. Płytka Z

17. Szachownica 6×6 jest pokryta płytkami 2×1. Pokaż, że istnieje linia, która dzieli szachownicę na dwie części i nie przecina żadnej płytki 2×1 (może dotykać brzegu).

18. Czy biało-niebieską figurę przedstawioną na rysunku z usuniętym czerwonym polem da się pokryć płytkami 2×1?



Rysunek 8. Figura z zadania

19. Czy w pola szachownicy 8×8 da się wpisać liczby $0, -1, 1$ w taki sposób, aby sumy liczb w wierszach, kolumnach i przekątnych były różne?

20. Czy w pola szachownicy 8×8 da się wpisać liczby $1, -1$ w ten sposób, aby iloczyn liczb w każdym wierszu wynosił 1, a w każdej kolumnie -1?

21. W każde pole szachownicy 25×25 wpisano liczbę -1 lub 1. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_{25}$ oznaczają iloczyny liczb w kolumnach, $b_1, b_2, \ldots, b_{25}$ - iloczyny w wierszach. Udowodnij, że

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{25} + b_1 + b_2 + \ldots + b_{25} \neq 0.$$

22. Każdy punkt płaszczyzny należy pomalować na pewien kolor w taki sposób, aby każda prosta była jednokolorowa lub dwukolorowa. Jaka jest największa możliwa liczba kolorów, których można użyć do pomalowania punktów tej płaszczyzny? Odpowiedź uzasadnij.

---

23. Kwadrat o boku 18 podzielono na kwadraty jednostkowe zwane dalej polami. Ile najwięcej prostokątów o wymiarach 1×7 można umieścić w kwadracie w taki sposób, że każdy prostokąt pokrywa 7 pól, a przy tym prostokąty na siebie nie nachodzą?

24. Dana jest szachownica 4×4. Czy konik szachowy może przejść przez całą szachownicę odwiedzając każde z pól tylko raz?

25. Czy szachownicę o wymiarach 8×8 można pokryć 12 klockami o wymiarach 1×5 i jednym klockiem o wymiarach 2×2 umieszczonym w rogu szachownicy?

26. Szachownicę o wymiarach 2018×2018 przykryto przy pomocy jednej kwadratowej płytki 2×2 i płytek 1×5. Wykazać, że płytka 2×2 nie przykrywa żadnego pola o krawędzi zawartej w brzegu szachownicy.

27. Na ile sposobów w pola szachownicy 8×8 można wpisać liczby 1 lub -1 tak, aby suma liczb w każdym kwadracie 2×2 wynosiła 0?

28. Szachownicę o wymiarach 15×15 przykryto przy pomocy płytek o wymiarach 2×2 i 3×3. Wyznaczyć najmniejszą liczbę użytych płytek 3×3, dla której jest to możliwe.

29. Murarz ma prostopadłościenne cegły o wymiarach $2 \times 5 \times 8$ i $2 \times 3 \times 7$ oraz pudełko o wymiarach $10 \times 11 \times 14$. Chce on umieścić cegły w pudełku w taki sposób, aby całe pudełko było wypełnione i żadna cegła nie wystawała. Znajdź wszystkie możliwe liczby cegieł, które może on użyć, aby w prawidłowy sposób wypełnić pudełko.

24. GRAFY[22]

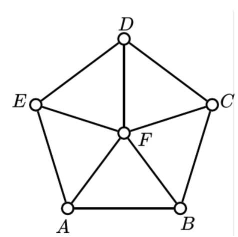
24.1. **Wprowadzenie.** W tym rozdziale wprowadzimy podstawowe pojęcia i przykłady dziedziny matematyki zwanej *teorią grafów.* Intuicyjnie graf możemy rozumieć jako zbiór punktów na płaszczyźnie połączonych krawędziami. Grafy pojawiają się w bardzo różnych dziedzinach nauki i praktyki, w tym w ekonomii, socjologii, bankowości, przede wszystkim w związku z problemami optymalizacji i zastosowaniami informatycznymi. Wiele zadań konkursowych (zarówno na olimpiadzie matematycznej, jak i informatycznej) dotyczy teorii grafów. Poniżej prezentujemy podstawowe pojęcia.

Definicja 24.1
Grafem $G = (V, E)$ nazywamy parę zbiorów V i E, taką że elementami E są pary uporządkowane elementów V. Zbiór V nazywamy zbiorem wierzchołków G, a E nazywamy zbiorem krawędzi G. Krawędź łączącą wierzchołki x i y oznaczamy (x, y). O wierzchołkach x, y mówimy wtedy, że sąsiadują ze sobą w G. O krawędzi (x, y) mówimy, że przylega do wierzchołków x i y.

Przykład 24.2
Niech $V = A, B, C, D, E, F$ będzie zbiorem 6 wierzchołków, zbiór krawędzi niech będzie równy

$$E = \{(A,B),(B,A),(B,C),(C,B),(C,D),(D,C),(D,E),(E,D),(A,E),(E,A),\\ (F,A),(A,F),(F,B),(B,F),(F,C),(C,F),(F,D),(D,F),(F,E),(E,F)\}.$$

Intuicyjnie rozumiemy, że V to punkty na płaszczyźnie, a E to lista wszystkich połączeń między tymi punktami. Zwykle tę intuicyjną interpretację przedstawiamy przy pomocy rysunku, rysunek grafu zdefiniowanego w tym przykładzie znajduje się poniżej.



RYSUNEK 9. Graf z przykładu 2

Uwaga: Widzimy, że na liście krawędzi powyżej występują pary typu (x, y), (y, x), które na rysunku odpowiadają jednemu połączeniu na rysunku. Dlatego zwykle myślimy o nich jako o jednej krawędzi i mówimy, że graf ma 10 (a nie 20 jak wynika z listy) krawędzi. Formalnie tę nieścisłość można rozwiązać definiując krawędź jako parę nieuporządkowaną, ale ze względu na to, że w zadaniach bardzo często mówi się o "grafach skierowanych", to będziemy trzymać definicji powyżej.

Poniższa definicja dotyczy różnych liczb związanych z grafami.

Definicja 24.3
Definiujemy następujące liczby związane z grafami.

1. Zbiór wierzchołków sąsiadujących z x oznaczamy $\Gamma(x)$ - zbiór sąsiadów x. Liczność tego zbioru nazywamy stopniem wierzchołka x.
2. Liczność zbioru wierzchołków $|V|$ nazywamy rzędem grafu.

[22] Rozdział dodany przez Agnieszkę Hejnę

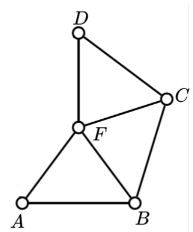
3. Liczność zbioru krawędzi $|E|$ podzieloną przez 2 nazywamy rozmiarem grafu.

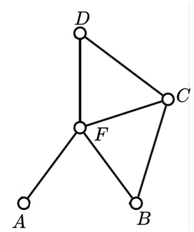
Graf z przykładu 2 jest rzędu 6, a np. wierzchołek "D"jest stopnia 3 (bo ma sąsiadów "E", "F"i "C").

Bardzo często w grafach sensownie jest rozważać pewną jego część, formalnie określamy to w poniższej definicji.

Definicja 24.4
Graf $G = (V, E)$ nazywamy podgrafem grafu $G = (V, E)$, jeśli $V' \subseteq V$ i $E' \subseteq E$. Jeśli G' jest maksymalnym podgrafem grafu G, którego zbiorem wierzchołków jest V' , wtedy G' nazywamy podgrafem G rozpiętym na podzbiorze wierzchołków V' (lub indukowanym przez podzbiór wierzchołków V').

Przykład 24.5
Oba poniższe grafy to podgrafy grafu z przykładu 2 (powstały poprzez wybranie pewnej liczby wierzchołków i krawędzi z wyjściowego grafu). Graf po lewej jest podgrafem indukowanym przez zbiór wierzchołków $\{A, B, C, D, F\}$ (z wyjściowego grafu wybrano te wierzchołki i **wszystkie** krawędzie między nimi). Natomiast graf po prawej nie jest podgrafem indukowanym przez zbiór wierzchołków $\{A, B, C, D, F\}$, bo krawędź (A, B) została pominięta.





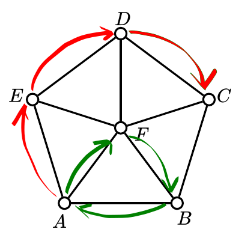
Rysunek 10. Podgrafy grafu z przykładu 2

W praktyce bardzo często nieformalnie mówimy, że po grafie można ćhodzić". W poniższej definicji definiujemy pojęcia, które w pewien sposób uzasadniają to stwierdzenie.

Definicja 24.6
Definiujemy następujące pojęcia związane z "chodzeniem" po grafach.

1. Ścieżka w grafie $v_1, v_2, \ldots, v_n$ to ciąg wierzchołków grafu, w którym każde dwa kolejne wierzchołki sąsiadują w grafie.
2. Długość ścieżki to długość powyższego ciągu pomniejszona o 1 (czyli liczba $n - 1$).
3. Cykl w grafie to ścieżka, w której $v_1 = v_n$.
4. Mówimy, że graf jest spójny, jeśli dla dowolnych dwóch wierzchołków v, w z V istnieje ścieżka w której $v_1 = v$ i $v_n = w$.
5. Długość najkrótszej ścieżki w grafie takiej, że $v_1 = v$ i $v_n = w$ nazywamy odległością punktów v i w.
6. Maksymalne spójne podgrafy nazywamy spójnymi składowymi grafu.

Przykład 24.7
Na rysunkach ścieżki i cykle często zaznaczamy np. przy pomocy strzałek. W grafie z przykładu 2 mamy np. ścieżkę A, E, D, F długości 3 (na rysunku zaznaczono ją na czerwono) i cykl w grafie A, F, B, A długości 3 (na zielono). Graf ten jest spójny. Odległość między wierzchołkami A i C wynosi 2. Aby to uzasadnić, wystarczy zauważyć, że wierzchołki te nie są połączone, zatem nie ma między nimi ścieżki długości 1, ale jest między nimi ścieżka A, B, C długości 2.

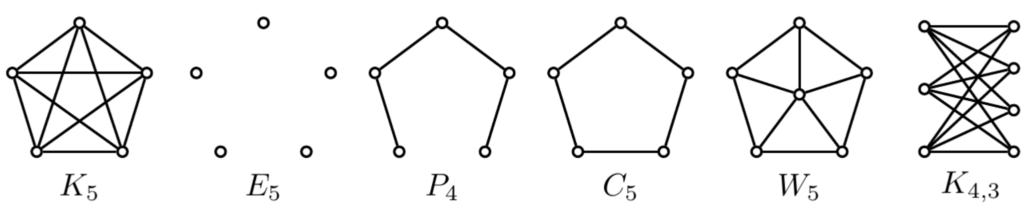


Rysunek 11. Ścieżka i cykl w grafie

W zadaniach często występują pewne szczególne typy grafów. Wymieniamy je w poniższej definicji.

Definicja 24.8
Definiujemy następujące typy grafów.

1. Klika (graf pełny) K_n to graf o n wierzchołkach o rozmiarze $\binom{n}{2}$.
2. Graf pusty E_n to graf, w którym $E = \emptyset$.
3. Droga P_n to graf o wierzchołkach $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ i krawędziach
$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_3, v_2), \ldots, (v_n, v_{n_1}), (v_{n-1}, v_n)\}.$$
4. Cykl C_n to graf, który powstaje z drogi P_{n-1} poprzez dodanie dwóch krawędzi (v_1, v_n) i (v_n, v_1).
5. Graf W_n to "koło ze szprychami" (patrz rysunek).
6. Graf dwudzielny to graf, którego zbiór wierzchołków V można podzielić na dwa rozłączne zbiory V_1 i V_2 takie, że krawędzie występują tylko między elementami zbiorów V_1 i V_2.
7. Graf dwudzielny taki, że $|V_1| = n$, $|V_2| = m$ i mający nm krawędzi to dwudzielna klika $K_{n,m}$.
8. Graf nazywamy regularnym stopnia k (lub k-regularnym), jeśli wszystkie wierzchołki mają stopień równy k.



Rysunek 12. Szczególne typy grafów

Część teoretyczną zakończymy formalną definicją izomorfizmu grafów. Odpowiada ona temu, co intuicyjnie możemy określić jako bycie "takim samym".

Definicja 24.9
Grafy $G = (V, E)$ oraz $G = (V, E)$ nazywamy izomorficznymi jeśli istnieje bijekcja $\phi : V \longmapsto V$, takie że dla wszystkich $x, y \in V$ zachodzi warunek
$$(x, y) \in E \iff (\phi(x), \phi(y)) \in E'.$$

24.2. **Lista zadań.**

1. ???

2. ???

3. ???

4. ???

25. KOMBINATORYKA

25.1. **Wprowadzenie.** ...

25.2. **Lista zadań.**

---

1. Rzucamy trzy razy moneta. Ile jest wszystkich mozliwych wyników tego doswiadczenia?
2. Ile, niekoniecznie mających znaczenie, słów można ułożyć ze słowa KRAM używając wszystkich czterech liter?
3. Ile jest liczb dwucyfrowych, w których cyfra jedności jest równa 1 lub 3, zaś cyfra dziesiątek jest większa od 5?
4. Ile jest liczb dwucyfrowych? A stucyfrowych?
5. Ile jest liczb dwucyfrowych parzystych?
6. Ile jest par typu (litera, liczba)?

---

7. Ile jest podzbiorów k-elementowych zbioru n-elementowego?
8. Ile jest możliwych numerów rejestracyjnych typu DJ26278, tzn. 2 litery i 5 cyfr?
9. Z Wrocławia do Barda prowadzą 4 ścieżki przez góry i lasy i jedna koleją. Na ile sposobów można przebyć trasę Wrocław - Bardo - Wrocław tak, aby wracać inaczej niż się przyjechało?
10. Na ile różnych sposobów nauczyciel może wystawić oceny 30 – osobowej klasie, tak żeby wszyscy zdali?(w 6 stopniowej skali ocen)
11. Magda ma 17 sukienek, 20 par butów i zaledwie 10 torebek. Ile różnych zestawów (sukienka, buty, torebka) może założyć?
12. Szyfr do tajnego sejfu składa się z czterech różnych cyfr od 1 do 9 włącznie. Ile jest wszystkich możliwości, jeżeli pierwsza cyfra jest większa od 6?
13. Szyfr do bardzo tajnego sejfu składa się ze 100 różnych cyfr od 1 do 9 włącznie. Ile jest wszystkich możliwości, jeżeli pierwsza cyfra jest większa od 6, a każda znajdująca się na pozycji parzystej jest nieparzysta?
14. Ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje jedna cyfra nieparzysta i trzy cyfry parzyste.
15. Ile osób musiałoby się urodzić w Polsce w ciągu jednego dnia, żeby zabrakło numerów PESEL?
16. Ile jest liczb czterocyfrowych, w których 3 nie występuje po 4?
17. Ile jest liczb o ustalonej ilości cyfr n, w których cyfry się nie powtarzają?
18. Ile liczb mniejszych od 1000 jest podzielnych przez 3 i/lub/albo 4?
19. Na ile sposobów można wybrać trzy liczby spośród liczb od 1 do 10 tak aby ich suma wynosiła 11?
20. Z pudełka, w którym znajduje się 9 ponumerowanych kul od 1 do 9 włącznie, losujemy kolejno bez zwracania 3 kule. Zapisując wyniki losowań tworzymy liczby trzycyfrowe. Udowodnij że w ten sposób można utworzyć 378 liczb mniejszych od 780?
21. Ile słów można ułożyć ze słowa MATEMATYKA?
22. Ile jest permutacji zbioru 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, w których cyfry 1 i 9 nie sąsiadują ze sobą?

23. Mamy 5 książek, w tym „Hrabiego Monte Christo” i „Harrego Pottera”. Ustawiamy je losowo na pustej półce, jedna obok drugiej. Na ile sposóbów można je tak ustawić, aby:
a)wyszczególnione książki nie stały obok siebie?
b)pomiędzy tymi książkami stały dwie inne?

24. Spotyka się 10 osób. Ile nastąpi powitań?

25. Wybieramy 5 osobową delegację z 30 osobowej klasy. Na ile sposób możemy to zrobić?

26. Na turnieju szachowym każdy rozegrał z każdym dwie partie. Ilu było zawodników jeśli rozegrano w sumie 42 partie?

27. Z grupy 3 kobiet i 4 mężczyzn wybieramy 3 osoby. Ile jest takich sposobów wyboru żeby wśród wybranych osób:
a) były same kobiety
b) byli sami mężczyźni
c) były dwie kobiety i jeden mężczyzna?

28. W skrzyni jest 7 białych kul, 2 czarne i 1 zielona. Ile jest możliwych sposobów wyboru dwóch kul z tej skrzyni, tak aby:
a) kule były różnych kolorów
b) obie kule były białe
c) kule były tego samego koloru
d) przynajmniej jedna z kul była białą?

29. W losowaniu Dużego Lotka losujemy 6 kul z 49 kul ponumerowanych od 1 do 49. Ile jest wszystkich wyników losowania w Dużym Lotku.

30. W wyścigu startuje 9-tu zawodników. Ile jest możliwych klasyfikacji końcowych (zakładamy, że wszyscy dojechali)?

31. Ile jest liczb trzycyfrowych podzielnych przez 7?

32. Ile jest liczb trzycyfrowych podzielnych przez 3 i 4?

33. Ile jest liczb mniejszych od 1000 podzielnych przez 3, 4, ale nie przez 5?

34. Ile jest liczb czterocyfrowych, w których 3 nie występuje po 4?

35. Ile jest liczb mniejszych od 1000 podzielnych przez 3, 5 i 7?

36. Ile jest liczb mniejszych od 1000 podzielnych przez 3 lub 5, lub 7, lub 11?

37. Ile jest liczb mniejszych od 1000 podzielnych przez 3 albo 5, albo 7, albo 11?

38. Na ile sposobów można posadzić 150 rycerzy przy okrągłym stole?

39. Ile różnych dzielników ma liczba $7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12$?

40. Ile podzbiorów ma zbiór 1, 2, 3, 4, 5?

41. Wybieramy z klasy 20-osobowej przewodniczącego, zastępce i skarbnika. Na ile sposobów możemy to zrobić?

42. Ile jest sposobów rozmieszczenia k osób w n-osobowej sali?

43. Wybieramy z klasy 40-osobowej 9-osobowa delegacje. Na ile sposobów możemy to zrobić?

44. Jakie jest prawdopodobieństwo trafienia szóstki w Totolotku?

45. Ile jest podziałów 20-elementowego zbioru na cztery podzbiory 5-elementowe jeśli czwórka jest uporządkowana? Nieuporządkowana?

46. Ile jest sposobów zapisania liczby 2400 jako sumy pięciu liczb naturalnych? Zakładamy, że $\mathbb{N} = \{0, 1, ...\}$.

47. Ile jest sposobów zapisania liczby 2400 jako sumy pięciu liczb naturalnych? Zakładamy, że $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$.

48. Ile dzielników ma liczba 36000?

49. Na ile sposobów można podzielić odcinek długości n na k odcinków całkowitej długości?

50. Na ile sposobów można podzielić okrąg długości n na k łuków całkowitej długości?

51. Udowodnij na jak najwięcej sposobów tożsamości. Wszystkie występujące liczby są naturalne i takie, że symbole Newtona istnieją.

(a)
$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1},$$

(b)
$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k},$$

(c)
$$\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1},$$

(d)
$$\sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}\binom{n+k}{k} = \frac{1}{2}2^{2n+1} = 4^n,$$

(e)
$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n},$$

(f)
$$\sum_{k=0}^{n} 2^k\binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k},$$

(g)
$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} = 2^n,$$

(h)
$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1},$$

(i)
$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2},$$

(j)
$$\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m} = 2^{n-m}\binom{n}{m},$$

(k)
$$\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2},$$

(l)
$$\sum_{k=0}^{n} 2^k\binom{2n-k}{n} = 4^n,$$

52. (matura) Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowana liczba jest podzielna przez 15, jeśli wiadomo, że jest ona podzielna przez 18.

53. (matura) Rozpatrujemy wszystkie liczby naturalne dziesięciocyfrowe, w zapisie których mogą występować wyłącznie cyfry 1, 2, 3, przy czym cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy. Uzasadnij, że takich liczb jest 15 360.

54. (matura) W pudełku znajduje się 8 piłeczek oznaczonych kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do 8. Losujemy jedną piłeczkę, zapisujemy liczbę na niej występującą, a następnie zwracamy piłeczkę do urny. Tę procedurę wykonujemy jeszcze dwa razy i tym samym otrzymujemy zapisane trzy liczby. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania takich piłeczek, że iloczyn trzech zapisanych liczb jest podzielny przez 4. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego.

55. (matura) Z liczb ośmioelementowego zbioru Z = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 tworzymy ośmiowyrazowy ciąg, którego wyrazy się nie powtarzają. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że żadne dwie liczby parzyste nie są sąsiednimi wyrazami utworzonego ciągu. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

56. (matura) Rozważamy wszystkie liczby naturalne pięciocyfrowe zapisane przy użyciu cyfr 1, 3, 5, 7 , 9, bez powtarzania jakiejkolwiek cyfry. Oblicz sumę wszystkich takich liczb.

57. (matura) Oblicz, ile jest wszystkich siedmiocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie trzy cyfry 1 i dokładnie dwie cyfry 2.

58. Na ile sposobów można połączyć ze sobą w pary $2n$ osób?

59. Mamy przejść szachownice $n \times k$ z jednego wierzchołka do przeciwnego poruszając się skokami po bokach pól. Ile jest możliwych najkrótszych dróg?

60. Narysowano k prostych równoległych i przecięto je n prostymi równoległymi. Ile powstało równoległoboków?

61. Udowodnić, że n prostych leżących na płaszczyźnie, z których każde dwie przecinają się, ale żadne trzy nie przechodzą przez jeden punkt, dzieli płaszczyznę na $\frac{1}{2}\left(n^2+n+2\right)$ części.

62. Iloma sposobami można zbiór n przedmiotów podzielić na dwa zbiory?

63. Udowodnić, że wszystkie podzbiory zbioru skończonego można ustawić w ciąg, którego kolejne wyrazy różnią się jednym elementem.

64. Ile elementów ma zbiór trójek liczb naturalnych od 1 do $n+1$ takich, ze trzecia liczba jest większa od dwóch pozostałych? Wyprowadzić z tego wzór na sumę kwadratów pierwszych n liczb naturalnych.

65. Losujemy 6 spośród 49 liczb. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, ze nie wylosujemy dwóch sąsiednich liczb?

66. Na okregu rozmieszczono n punktów i poprowadzono wszystkie mozliwe cieciwy o koncach w tych punktach. Załózmy, ze zadne trzy cieciwy nie przecinaja sie w tym samym punkcie. Na ile czesci cieciwy dziela koło i ile tworza trójkatów?

67. Na ile sposobów można przejść ścieżką od punktu (0,0) do punktu (n, n) na płaszczyźnie, poruszając się tylko w prawo i w górę między punktami kratowymi?

68. Na ile sposobów można poustawiać prawidłowo n nawiasów (tzn. każdy nawias otwierający ma mieć nawias zamykający, np. ((()()(())))

69. Na ile sposobów można podzielić n-kąt foremny na trójkąty, za pomocą odcinków łączących wierzchołki w taki sposób, aby te odcinki się nie przecinały?

70. Na ile sposobów można spermutować ciąg $(1, 2, 3, ..., n)$, tak żeby liczby 1, 2, 3 nie wystąpiły po sobie jedna po drugiej?