Zadanie 1. Rozwiąż w S_7 równania:
a) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&1&3&4&7&2&6\end{pmatrix}\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&3&7&1&4&6&2\end{pmatrix}$; b) $\sigma\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&1&3&4&7&2&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&3&7&1&4&6&2\end{pmatrix}$.
(Wskazówka: pomnóż z właściwej strony przez odpowiednią permutację odwrotną.)

Zadanie 2. Permutację $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&3&7&5&4&6&1\end{pmatrix}$ przedstaw w postaci (a) iloczynu transpozycji; (b) iloczynu transpozycji postaci $(i,i+1)$; (c) iloczynu rozłącznych cykli. Postaraj się znaleźć przedstawienia możliwie małą liczbą czynników.

Zadanie 3. Uzasadnij wzór $(i-1,i)(i,i+1)(i-1,i)=(i,i+1)(i-1,i)(i,i+1)$.

Zadanie 4. Wyznacz liczbę inwersji w *ciągach*[1]: $(3,5,2,1,6,4,8,7)$; $(2,4,1,7,6,5,3)$; $(3,5,8,7,2,6,1,4)$.

Zadanie 5. Wyjaśnij które z podanych iloczynów (i z jakim znakiem) występują w rozwinięciu wyznacznika odpowiedniego (jakiego?) stopnia: a) $a_{13}a_{22}a_{31}a_{46}a_{55}a_{64}$; b) $a_{31}a_{13}a_{52}a_{45}a_{24}$; c) $a_{34}a_{21}a_{46}a_{17}a_{73}a_{54}a_{62}$.

Zadanie 6. Wybierz takie wartości i,j,k aby iloczyn $a_{51}a_{i6}a_{1j}a_{35}a_{44}a_{6k}$ wystąpił ze znakiem minus w rozwinięciu wyznacznika stopnia 6.

Zadanie 7. Wykorzystując wzór na pełne rozwinięcie wyznacznika (lub inaczej) oblicz

a) $\begin{vmatrix}a_{11}&0&0&\dots&0\\a_{21}&a_{22}&0&\dots&0\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&\dots&a_{nn}\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}0&\dots&0&0&a_{1n}\\0&\dots&0&a_{2,n-1}&a_{2n}\\0&\dots&a_{3,n-2}&a_{3,n-1}&a_{3n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\dots&a_{n,n-2}&a_{n,n-1}&a_{nn}\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&0&0&0\\a_{41}&a_{42}&0&0&0\\a_{51}&a_{52}&0&0&0\end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix}a&3&0&5\\0&b&0&2\\1&2&c&3\\0&0&0&d\end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix}1&0&2&a\\2&0&b&0\\3&c&4&5\\d&0&0&0\end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix}1/2&0&0&0&0&0&0\\1/2&2&1&0&0&0&0\\1/2&0&1&1&0&0&0\\1/2&0&0&1&1&0&0\\1/2&0&0&0&1&1&0\\1/2&0&0&0&0&1&1\\1/2&0&0&0&0&0&1\end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\0&8&9&1&2&3&4\\0&0&1&2&3&4&5\\0&0&0&2&3&4&5\\0&0&0&0&1&2&3\\0&0&0&0&0&3&4\\0&0&0&0&-1&0&1\end{vmatrix}$

Zadanie 8. Za pomocą pełnego rozwinięcia oblicz wartość wyznacznika, którego elementy na głównej przekątnej są wszystkie równe 1, elementy j-tego wiersza są równe $a_1,a_2,\dots,a_{j-1},a_j=1,a_{j+1},\dots,a_n$, a wszystkie pozostałe wyrazy są równe 0.

Zadanie 9. Znajdź wyrazy, które zawierają a) x^3, b) x^4 rozwinięciu wyznacznika $\begin{vmatrix}x&1&2&3\\x&x&1&2\\1&2&x&3\\x&1&2&2x\end{vmatrix}$.

Zadanie 10. Oblicz wyznaczniki:

a) $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\-3&2&-5&13\\1&-2&10&4\\-2&9&-8&25\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}\frac12&\frac13&\frac12&1\\\frac13&\frac12&1&\frac12\\\frac12&1&\frac12&\frac13\\1&\frac12&\frac13&\frac12\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}7&6&9&4&-4\\1&0&-2&6&6\\7&8&9&-1&-6\\1&-1&-2&4&5\\-7&0&-9&2&-2\end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix}1&5&3&5&-4\\3&1&2&9&8\\-1&7&-3&8&-9\\3&4&2&4&7\\1&8&3&3&5\end{vmatrix}$.

Zadanie 11. Uzasadnij, że każde $\sigma\in S_n$ można przedstawić jako iloczyn transpozycji $(1,j)$ dla $j=2,\dots,n$.

Zadanie 12. Jak zmieni się wartość wyznacznika $n\times n$ jeśli:
a) znak każdego z jego wyrazów zmienić na przeciwny?
b) każdy element a_{ij} pomnożyć przez c^{i-j}, $c\neq 0$?
c) pierwszą kolumnę przestawić na ostatnie miejsce, a pozostałe przesunąć w lewo, zachowując ich porządek?
d) wiersze zapisać w odwrotnym porządku?

Zadanie 13. Wykaż, że dowolny wyznacznik jest równy połowie sumy dwóch wyznaczników, z których jeden jest otrzymany z danego przez dodanie do wszystkich wyrazów i-tego wiersza liczby a, a drugi jest otrzymany z danego przez dodanie do wszystkich wyrazów i-tego wiersza liczby $-a$.

Zadanie 14. Uzasadnij, że jeśli A i B są macierzami kwadratowymi, to $\det\begin{pmatrix}A&C\\0&B\end{pmatrix}=\det(A)\det(B)$. Za pomocą indukcji spróbuj to uogólnić na większą liczbę macierzy kwadratowych.

Zadanie 15. Oblicz wyznaczniki, np. przez sprowadzenie do postaci trójkątnej:

a) $\begin{vmatrix}1&2&3&\dots&n\\-1&0&3&\dots&n\\-1&-2&0&\dots&n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&-2&-3&\dots&0\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}1&2&3&\dots&n-2&n-1&n\\2&3&4&\dots&n-1&n&n\\3&4&5&\dots&n&n&n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\n&n&n&\dots&n&n&n\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}1&1&\dots&1&-n\\1&1&\dots&-n&1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&-n&\dots&1&1\\-n&1&\dots&1&1\end{vmatrix}$.

[1] Tu ciąg $a_1a_2\dots a_n$ utożsamiamy z permutacją $\sigma\in S_n$ taką że $\sigma(j)=a_j$.

Zadanie 16. Oblicz wyznaczniki:

a) $\begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2+x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n+x \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \dots & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \dots & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \dots & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$

Zadanie 17. Oblicz rekurencyjnie wyznaczniki:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a+b \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{vmatrix}$.

Zadanie 18. Oblicz podane wyznaczniki, zapisując je w postaci iloczynu wyznaczników :

a) $\begin{vmatrix} \cos(x_1-y_1) & \cos(x_1-y_2) & \dots & \cos(x_1-y_n) \\ \cos(x_2-y_1) & \cos(x_2-y_2) & \dots & \cos(x_2-y_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(x_n-y_1) & \cos(x_n-y_2) & \dots & \cos(x_n-y_n) \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$, $s_k := x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$.

Zadanie 19. Z tego, że liczby 1798, 2139, 3255 i 4867 dzielą się przez 31 wywnioskuj, że $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ dzieli się przez 31.

Zadanie 20. Wskaż maksymalnego rozmiaru niezerowy minor macierzy $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 7 & 6 & 10 \\ 3 & -2 & 0 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & 11 & 7 & 15 \end{pmatrix}$.

Zadanie 21. Pewna macierz 50×100 ma niezerowy minor rozmiaru 37×37. Co można powiedzieć o wymiarze jądra przekształcenia zadanego tą macierzą?

Zadanie 22. Niech V będzie k-wymiarową podprzestrzenią $\mathbf{R}^n$. Udowodnij, że istnieją $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$, takie że odwzorowanie $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ dane przez $F((x_1, \ldots, x_n)^\top) = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})^\top$ po obcięciu do V jest izomorfizmem $V \to \mathbf{R}^k$.

Zadanie 23. Udowodnij, że jeśli dla każdej pary $i \neq j$ zachodzi $(n-1)|a_{ij}| < |a_{ii}|$, to $\det(a_{ij}) \neq 0$.

Zadanie 24. Załóżmy że funkcje $f_1, \ldots, f_n \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ są $n-1$ razy różniczkowalne. Udowodnij, że jeśli dla pewnego $x \in \mathbf{R}$ zachodzi $\begin{vmatrix} f_1(x) & f_1'(x) & \dots & f_1^{(n-1)}(x) \\ f_2(x) & f_2'(x) & \dots & f_2^{(n-1)}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(x) & f_n'(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0$, to $f_1, \ldots, f_n$ są lnz (w przestrzeni wszystkich funkcji z $\mathbf{R}$ w $\mathbf{R}$).[2]

Zadanie 25. Na $M_{n\times n}(\mathbf{R})$ definiujemy relację równoważności $\sim$: $A \sim B \iff B$ można uzyskać z A przez ciąg operacji kolumnowych. Opisz klasy abstrakcji relacji $\sim$.

Zadanie 26. Pokaż, że $\det((x_i + y_j)^{-1}) = \prod_{i>j}(x_i - x_j)(y_i - y_j) / \prod_{i,j}(x_i + y_j)$. (Jest to tzw. wyznacznik Cauchy'ego.)

Zadanie 27. Po $\mathbf{Z}$ spaceruje losowo n policjantów; każdy ma własną monetę, co minutę nią rzuca, na orła robi krok długości 1 w prawo, a na reszkę krok długości 1 w lewo. Niech $a_1 < \ldots < a_n$, $b_1 < \ldots < b_n$ będą liczbami parzystymi; niech p_{ij} oznacza prawdopodobieństwo, że policjant wychodzący z a_i po godzinie znajdzie się w b_j. Udowodnij, że prawdopodobieństwo tego że n policjantów zaczynających spacer w $a_1, \ldots, a_n$ po godzinie znajdzie się w $b_1, \ldots, b_n$, przy czym po drodze żadni dwaj się nie spotkają, wynosi $\det(p_{ij})$.

Zadanie 28. Niech $v_1, \ldots, v_n \in V$ oraz niech $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in V^*$. Załóżmy, że $\det(\varphi_i(v_j)) \neq 0$. Udowodnij, że wtedy (v_i) są lnz w V oraz (φ_j) są lnz w V^*. Czy jest też odwrotnie?

---

[2] Ten wyznacznik nazywamy *Wrońskianem* funkcji $f_1, \ldots, f_n$. Przydaje się w równaniach różniczkowych.