Dla operatora zwartego T w przestrzeni Hilberta mamy

$$\dim\ker(I-T) = \dim\ker(I-T^*).$$

Podobnie jak w dowodzie alternatywy Fredholma można zagadnienie ograniczyć do przypadku, gdy T ma skończony wymiar. Niech $\{e_k\}_{k=1}^n$ będzie bazą ortonormalną w obrazie operatora T. Wtedy

$$Tx = \sum_{k=1}^n \langle Tx, e_k\rangle e_k = \sum_{k=1}^n \langle x, T^*e_k\rangle e_k$$

Dalej

$$\langle T^*y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle = \sum_{k=1}^n \langle y, e_k\rangle\langle T^*e_k, x\rangle.$$

Zatem

$$T^*y = \sum_{k=1}^n \langle y, e_k\rangle T^*e_k.$$

Wektory e_k są ortogonalne do $\ker T^*$, zatem wektory T^*e_k są liniowo niezależne. Rozważmy równania

$$Tx = x, \quad T^*y = y.$$

Zapiszmy

$$x = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j, \qquad y = \sum_{j=1}^n \lambda_j T^*e_j.$$

Wtedy równania sprowadzają się do układów

$$\lambda_j = \sum_{k=1}^n \langle Te_k, e_j\rangle \lambda_k \qquad \lambda_j = \sum_{k=1}^n \langle e_k, Te_j\rangle \lambda_k.$$

Macierze układów są sprzężone do siebie, więc przestrzenie rozwiązań mają ten sam wymiar.